G. Nebe, M. Künzer

Algebra I, WS 04/05

Lösung 4

Aufgabe 16.

(1) Die Anzahl a_7 der 7-Sylowgruppen in G ist gleich 1, da $a_7 \equiv_7 1$ und da a_7 den Quotienten $|G|/7 = 11$ teilt.

Die Anzahl a_{11} der 11-Sylowgruppen in G ist gleich 1, da $a_{11} \equiv_{11} 1$ und da a_{11} den Quotienten $|G|/11 = 7$ teilt.

Somit haben wir eine normale 7-Sylowgruppe, sagen wir C_7, und eine normale 11-Sylowgruppe, sagen wir C_{11}. Es ist $C_7 \cap C_{11} = 1$, und daher $|C_7C_{11}| = 77$, d.h. $C_7C_{11} = G$. Es folgt $G \simeq C_7 \times C_{11}$. Ist $C_7 = \langle a\rangle$ und $C_{11} = \langle b\rangle$, so ist ab (identifiziert mit $(a,b) \in C_7 \times C_{11}$) ein Element von Ordnung 77. Es folgt $G = \langle ab\rangle \simeq C_{77}$.

(2) Die Anzahl a_7 der 7-Sylowgruppen in G ist gleich 1, da $a_7 \equiv_7 1$ und da a_7 den Quotienten $|G|/7 = 2$ teilt. Sei $P_7 = \langle x\rangle$ die 7-Sylowgruppe von G.

Sei $P_2 = \langle y\rangle$ eine 2-Sylowgruppe von G. Es ist $G = \langle x, y\rangle$, da 7 ein echter Teiler von $|\{x, y\}|$ ist.

Wegen $\langle x\rangle \trianglelefteq G$ ist ${}^{y}x = x^k$ für ein $k \in [1,6]$. Da $y^2 = 1$, ist $x = {}^{y^2}x = x^{k^2}$, und wir folgern $k \in \{1,6\}$. Wäre $k = 1$, so wäre $yx = xy$, und G wäre abelsch, was nicht der Fall ist. Also ist $k = 6$, und ${}^{y}x = x^6 = x^{-1}$.

Schreibe $P_2^{(i)} := {}^{x^i}P_2$ für $i \in [1,7]$. Also z.B. $P_2 = P_2^{(7)}$. Schreibe $\mathrm{Syl}_2(G) := \{P_2^{(i)} \;:\; i \in [1,7]\}$ für die Menge der 2-Sylowgruppen in G. Beachte, daß P_2 nicht fix unter Konjugation mit x bleibt, da sonst P_2 normal in G wäre, da ja ohnehin ${}^{y}P_2 = P_2$, und daß daher die Bahn von P_2 unter Konjugation mit $\langle x\rangle$ in der Tat 7 verschiedene Elemente umfaßt.

Es wird

$$\begin{array}{rcccccl} {}^{x}(P_2^{(i)}) &=& {}^{x^{i+1}}P_2 &=& P_2^{(1,2,3,4,5,6,7)(i)} && \\ {}^{y}(P_2^{(i)}) &=& {}^{yx^i}P_2 &=& {}^{x^{-i}y}P_2 &=& {}^{x^{-i}}P_2 = P_2^{(1,6)(2,5)(3,4)(i)} . \end{array}$$

Wir haben einen Isomorphismus $\mathcal{S}_{\mathrm{Syl}_2(G)} \simeq \mathcal{S}_7$, der von der Bijektion $[1,7] \longrightarrow \mathrm{Syl}_2(G)$, $i \longmapsto P_2^{(i)}$ induziert wird.

Die Operation von G auf $\mathrm{Syl}_2(G)$ via Konjugation induziert eine Abbildung $G \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathrm{Syl}_2(G)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_7$, welche x auf $(1,2,3,4,5,6,7)$ und y auf $(1,6)(2,5)(3,4)$ schickt. Da das Bild dieser Abbildung Ordnung 14 hat, ist diese Abbildung injektiv und gibt in der Tat einen Isomorphismus

$$G \xrightarrow{\sim} \langle (1,2,3,4,5,6,7), (1,6)(2,5)(3,4)\rangle .$$

(3) Die Anzahl a_7 der 7-Sylowgruppen in G ist in $\{1,15\}$, da $a_7 \equiv_7 1$ und da a_7 den Quotienten $|G|/7 = 15$ teilt.

Die Anzahl a_5 der 5-Sylowgruppen in G ist in $\{1,21\}$, da $a_5 \equiv_5 1$ und da a_5 den Quotienten $|G|/5 = 21$ teilt.

Die Anzahl a_3 der 3-Sylowgruppen in G ist in $\{1,7\}$, da $a_3 \equiv_3 1$ und da a_3 den Quotienten $|G|/3 = 35$ teilt.

Wir stellen zunächst einmal fest, daß eine Untergruppe $U \le G$ mit $|U| = 35$ normal in G ist. In der Tat operiert G auf G/U, was uns einen Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_{G/U} \simeq \mathcal{S}_3$ gibt. Dessen Kern N liegt in U, und es gilt somit $3 \mid [G:N] \mid 3!$. Da 2 kein Teiler von $|G| = 105$ ist, folgt $[G:N] = 3$, und mithin $U = N \trianglelefteq G$. (Vgl. Aufgabe 18 (2)).

Fall $a_7 = 15$. Wir haben $15 \cdot (7-1) = 90$ Elemente der Ordnung 7. Damit gibt es maximal $105 - 1 - 90 = 14$ Elemente der Ordnung 5, was $a_5 = 21$ ausschließt, da dies $21 \cdot (5-1) = 84$ Elemente der Ordnung 5 zur Folge hätte.

Also folgt $a_5 = 1$. Sei P_5 die 5-Sylowgruppe von G. Sei P_7 eine 7-Sylowgruppe von G. Da $P_5 \trianglelefteq G$, ist $P_5P_7 := \{xy \;:\; x \in P_5,\; y \in P_7\} \le G$. Da $P_5 \cap P_7 = 1$, ist die Abbildung $P_5 \times P_7 \longrightarrow G$, $(x,y) \longmapsto xy$ injektiv. Somit ist P_5P_7 eine Untergruppe von Ordnung 35 in G, welche nach Obigem einen Normalteiler darstellt.

Man kann auch noch zeigen, daß der Fall $a_7 = 15$ nicht auftreten kann. Wie in (1) sieht man nämlich, daß $N := P_5P_7$ abelsch ist. Daher ist insbesondere $N \le \mathrm{N}_G(P_7)$, und also $\{\,{}^{g}P_7 \;:\; g \in G\} = \{\,{}^{g}P_7 \;:\; gN \in G/N\}$. Wegen $|G/N| = 3$ gibt es deswegen höchstens 3 Konjugierte von P_7, im Widerspruch zur Fallvoraussetzung.

Da man im davor angeführten Lösungsweg eine Aussage über eine Gruppe macht, die es nicht gibt, ist dieser ergänzte Lösungsweg, also das Ausschließen dieses Falles, sauberer – aber länger.

Fall $a_7 = 1$. Sei P_7 die 7-Sylowgruppe von G, und sei P_5 eine 5-Sylowgruppe von G. Wie eben, nur diesenfalls wegen $P_7 \trianglelefteq G$, wird P_5P_7 ein Normalteiler von Ordnung 35 von G.

Aufgabe 17. Bezeichne P_p, für p einen Primteiler von $|G|$, eine p-Sylowgruppe von G.

Da jede Untergruppe von Ordnung eine Potenz von p in der p-Sylowgruppe enthalten ist, kann man zum Auffinden von P_p etwa wie folgt vorgehen. Wir beginnen mit einem Element von Ordnung eine möglichst große Potenz von p. Ist noch keine p-Sylowgruppe erreicht, so gibt es ein weiteres Element, welches zusammen mit der bisherigen Gruppe eine größere p-Gruppe (i.e. eine Gruppe von Ordnung eine p-Potenz) erzeugt. Ist immer noch keine p-Sylowgruppe erreicht, so gibt es noch ein weiteres Element, welches zusammen mit der bisherigen Gruppe eine größere p-Gruppe (i.e. eine Gruppe von Ordnung eine p-Potenz) erzeugt. Usf.

In diesem Prozeß hilft manchmal auch das Betrachten des Normalisators der bislang gefundenen p-Untergruppe, da man ein beliebiges Element von p-Potenzordnung dieses Normalisators hinzufügen darf.

(1) Es ist $|\mathcal{S}_4| = 2^3 \cdot 3^1$. Wir erhalten z.B. die folgenden Sylowgruppen (teilweise geben wir mehrere Alternativen).

$$\begin{array}{rcl} P_2 & = & \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle \\ \tilde{P}_2 & = & \langle (1,2), (1,3)(2,4) \rangle \;=\; (\langle (1,2) \rangle \times \langle (3,4) \rangle) \rtimes \langle (1,3)(2,4) \rangle \\ P_3 & = & \langle (1,2,3) \rangle \end{array}$$

(2) Es ist $|\mathcal{S}_{10}| = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Wir erhalten z.B. die folgenden Sylowgruppen (teilweise geben wir mehrere Alternativen).

$$\begin{array}{rcl} P_2 & = & \langle (1,2,3,4,5,6,7,8),\ (1,3,5,7),\ (1,5),\ (9,10) \rangle \\ \tilde{P}_2 & = & \langle (1,2),\ (1,3)(2,4),\ (1,5)(2,6)(3,7)(4,8),\ (9,10) \rangle \\ & = & \Big(\big((\langle (1,2) \rangle \times \langle (3,4) \rangle) \rtimes \langle (1,3)(2,4) \rangle \big) \times \big((\langle (5,6) \rangle \times \langle (7,8) \rangle) \rtimes \langle (5,7)(6,8) \rangle \big) \Big) \rtimes \langle (1,5)(2,6)(3,7)(4,8) \rangle \\ P_3 & = & \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9),\ (1,4,7) \rangle \\ \tilde{P}_3 & = & \langle (1,2,3),\ (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle \\ & = & (\langle (1,2,3) \rangle \times \langle (4,5,6) \rangle \times \langle (7,8,9) \rangle) \rtimes \langle (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle \\ P_5 & = & \langle (1,2,3,4,5),\ (6,7,8,9,10) \rangle \\ P_7 & = & \langle (1,2,3,4,5,6,7) \rangle \end{array}$$

(3) Es ist $|\operatorname{GL}_2(\mathbf{F}_{11})| = (11^2-1)(11^2-11) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$. Wir erhalten z.B. die folgenden Sylowgruppen.

$$\begin{array}{rcl} P_2 & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \\ P_3 & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \\ P_5 & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \\ P_{11} & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \end{array}$$

(4) Es ist $|\operatorname{GL}_3(\mathbf{F}_5)| = (5^3-1)(5^3-5)(5^3-5^2) = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$. Wir erhalten z.B. die folgenden Sylowgruppen.

$$\begin{array}{rcl} P_2 & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle \\ P_3 & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle \\ P_5 & = & \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a,b,c \in \mathbf{F}_5 \right\} \\ P_{31} & = & \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \end{array}$$

Aufgabe 18.

(1) Es sind alle p-Sylowgruppen in einer Bahn unter der Konjugationsoperation. Gibt es also nur eine p-Sylowgruppe, so bleibt sie fix unter Konjugation mit allen Elementen von G und ist mithin normal. Umgekehrt, ist eine p-Sylowgruppe P normal, so ist eine beliebige p-Sylowgruppe P', welche ja zu ihr konjugiert ist, ihr bereits gleich, da erstere P nur sich selbst als konjugierte Untergruppe zuläßt.

(2) Die Operation von G auf G/U versorgt uns mit einem Gruppenmorphismus $G \longrightarrow \mathcal{S}_{G/U} \simeq \mathcal{S}_{[G:U]}$. Sei N sein Kern. Da $|\mathcal{S}_{[G:U]}| = [G:U]!$, teilt die Ordnung des Bildes dieses Morphismus $[G:U]!$. Die Ordnung dieses Bildes ist aber gerade der Index $[G:N]$ von N in G. Ferner ist $N \leq U$, da jedes Element in $G \smallsetminus U$ bereits die Nebenklasse $1 \cdot U$ nicht festhält, und damit nicht auf die identische Abbildung abgebildet wird.

(3) Gibt es eine transitive H-Menge M mit $m = |M|$ Elementen, so gibt es mit (2) einen Normalteiler von Index zwischen m und $m!$. Ist $m > 1$, aber $m! < 60$, so kann es dies wegen der Einfachheit von H nicht geben. Dies ist für $m \in \{2, 3, 4\}$ der Fall.

(4) Gibt es eine transitive H-Menge M mit $|M| = 5$, dann gibt es einen nichttrivialen Morphismus $H \xrightarrow{f} \mathcal{S}_n$. Da wegen der Einfachheit von H nur 1 und H als Kern in Frage kommen, und H wegen der Nichttrivialität ausscheidet, folgt, daß der Kern gleich 1 ist, und der Morphismus somit injektiv ist. Wäre $f(H)$ nicht in $\mathcal{A}_5$ enthalten, so wäre die Komposition $H \xrightarrow{f} \mathcal{S}_5 \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{-1, +1\}$ surjektiv, und H hätte einen Normalteiler von Index 2 – was nicht der Fall ist. Also ist $f(H) \leq \mathcal{A}_5$ enthalten, und da auch $|f(H)| = 60$, ist somit $f(H) = \mathcal{A}_5$. Dies zeigt $H \simeq \mathcal{A}_5$.

(5) Die Anzahl a_5 der 5-Sylowgruppen erfüllt $a_5 \equiv_5 1$ und $a_5 \mid |H|/5 = 12$. Da wegen der Einfachheit von H und (1) folgt, daß $a_n \neq 1$, bleibt nur $a_5 = 6$ als einzige Möglichkeit über.

(6) Die Anzahl a_3 der 3-Sylowgruppen erfüllt $a_3 \equiv_3 1$ und $a_3 \mid |H|/3 = 20$, also $a_3 \in \{1, 4, 10\}$. Mit (1) folgt $a_3 \neq 1$. Da die Menge der 3-Sylowgruppen unter Konjugation eine transitive H-Menge darstellt, folgt mit (3), daß $a_3 \neq 4$. Also ist $a_3 = 10$.

(7) Die Anzahl a_2 der 2-Sylowgruppen erfüllt $a_2 \equiv_2 1$ und $a_2 \mid |H|/2 = 30$, ist also in $\{1, 3, 5, 15\}$ enthalten. Mit (1) folgt $a_2 \neq 1$. Mit (3) folgt $a_2 \neq 3$.

Nehmen wir nun $a_2 = 15$ an. Gäbe es kein Element in $H \setminus \{1\}$, welches in zwei verschiedenen 2-Sylowgruppen liegt, so hätten wir $15 \cdot 3 = 45$ Elemente in H von Ordnung 2 oder 4, was nicht der Fall ist. Also gibt es ein Element $x \in H$, welches in zwei verschiedenen 2-Sylowgruppen P und Q liegt. Da P und Q abelsch sind (wie alle Gruppen von Ordnung 4), liegen $P,\ Q \leq \mathrm{C}_H(x)$. Damit teilt $|P| = 4$ dessen Ordnung $|\mathrm{C}_H(x)|$ echt. Da ferner $\mathrm{Z}(H) = 1$ wegen der Einfachheit von H, ist umgekehrt $|\mathrm{C}_H(x)|$ ein echter Teiler von 60. Damit ist $|{}^H x| = [H : \mathrm{C}_H(x)] \in \{3, 5\}$. Unter Konjugation ist die Konjugationsklasse ${}^H x$ eine transitive H-Menge. Mit (3) können wir also $|{}^H x| = 3$ ausschließen. Also ist $|{}^H x| = 5$, und mit (4) also $H \simeq \mathcal{A}_5$. Nun hat in $\mathcal{A}_5$ die 2-Sylowgruppe $V_4 = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$ in $\mathcal{A}_5 = \langle (1, 2, 3), (3, 4, 5) \rangle$ eine Bahn von Länge 5 unter Konjugation mit H (wie man mit dem Bahnenalgorithmus bestätigt). Also hat ist in H genauso $a_2 = 5$. Widerspruch.

Somit ist $a_2 = 5$.

(8) Die Menge der 2-Sylowgruppen ist nach (7) eine 5-elementige transitive H-Menge. Mit (4) folgt $H \simeq \mathcal{A}_5$.

Aufgabe 19.

(1) Enthält N ein Element der Form (a, b, c), so enthält N via Konjugation in $\mathcal{S}_n$ alle Dreierzykel. Wir behaupten, daß daraus $N = \mathcal{A}_n$ folgt.

Ist $\sigma \in \mathcal{A}_n$, so können wir σ schreiben als Produkt einer geraden Anzahl von (nicht notwendig disjunkten) Transpositionen. Daher genügt es, das Produkt zweier Transpositionen als Produkt von Dreierzykeln zu schreiben.

Es ist $(a, b) \circ (b, c) = (a, b, c)$. Ferner ist $(a, b)(c, d) = (a, b, c) \circ (b, c, d)$.

(2) Sei $\sigma \in N$ das besagte Element, welches in Zykeldarstellung einen Zykel der Länge ≥ 3 aufweist. Sei dieser Zykel gleich $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Dann ist

$$\sigma^{-1}\,{}^{(a_2,a_3)}\sigma \;=\; (a_n, \ldots, a_3, a_2, a_1) \circ (a_1, a_3, a_2, \ldots, a_n) \;=\; (a_1, a_2, a_3) \;\in\; N\;,$$

da sich die eventuellen anderen Zykel von σ wegheben.

(3) Nun gibt es ein Element $\sigma \in N$, welches in disjunkter Zykelschreibweise wenigstens 3 Zykel der Länge 2 aufweist, sagen wir, (a, b), (c, d), (e, f). Es wird

$$\sigma^{-1}\,{}^{(b,c)(d,e)}\sigma \;=\; (a, b)(c, d)(e, f) \circ (a, c)(b, e)(d, f) \;=\; (a, d, e)(b, f, c) \;\in\; N\;,$$

da sich die eventuellen anderen Zykel von σ wegheben. Nach (2) enthält N auch einen Dreierzykel.

(4) Sei $e \in [1, n] \setminus \{a, b, c, d\}$ **(hier brauchen wir $n \geq 5$).** Es wird

$$\sigma^{-1}\,{}^{(b,e)}\sigma \;=\; (a, b)(a, e) \;=\; (a, e, b) \;\in\; N\;.$$

(5) Sei $N \neq 1$. Wir haben zu zeigen, daß $N = \mathcal{A}_n$. Sei $\sigma \in N \smallsetminus \{1\}$. Enthält die Zykeldarstellung von σ einen Zykel der Länge ≥ 3, so ist $N = \mathcal{A}_n$ mit (2) und (1).

Enthält die Zykeldarstellung von σ nur Zykel der Länge 2, und ist deren gerade Anzahl ≥ 4, so ist $N = \mathcal{A}_n$ mit (3) und (1).

Enthält die Zykeldarstellung von σ hingegen genau 2 Zykel der Länge 2, so ist $N = \mathcal{A}_n$ mit (4) und (1).

(6) Wir können annehmen, daß M nichttrivial ist, i.e., daß $M \notin \{1, \mathcal{A}_n\}$, da wir die Aussage für diese beiden Normalteiler als zutreffend kennen.

Sei $U \trianglelefteq \mathcal{A}_n$. Es ist $U \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ genau dann, wenn ${}^{\sigma}U = U$ für alle $\sigma \in \mathcal{A}_n \sqcup (1,2)\mathcal{A}_n$. Daher ist $U \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ genau dann, wenn ${}^{(1,2)}U = U$.

Insbesondere erfüllen die Normalteiler $M \cap {}^{(1,2)}M$ und $M \cdot {}^{(1,2)}M$ von $\mathcal{A}_n$ diese Bedingung.

Sei $M \ntrianglelefteq \mathcal{S}_n$ angenommen. Mit (5) ist $M \cap {}^{(1,2)}M = 1$ und $M \cdot {}^{(1,2)}M = \mathcal{A}_n$. Also ist die Abbildung $M \times {}^{(1,2)}M \longrightarrow \mathcal{A}_n$, welche (x, y) auf xy schickt, bijektiv. Damit enthält M gerade $\sqrt{n!/2}$ Elemente.

Auf der anderen Seite enthält $\mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2))$ alle Elemente von $\mathcal{A}_n$, welche 1 und 2 festlassen, und somit ist $|\mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2))| \geq (n-2)!/2$. Wegen $M \cap {}^{(1,2)}M = 1$ ist aber $M \cap \mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2)) = 1$, damit die Multiplikationsabbildung $M \times \mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2)) \longrightarrow \mathcal{A}_n$ injektiv, und wir erhalten insgesamt

$$n!/2 \;=\; |\mathcal{A}_n| \;\geq\; |M| \cdot |\mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2))| \;\geq\; \sqrt{n!/2} \cdot (n-2)!/2\,.$$

Dies ist falsch für $n \geq 7$, wovon man sich durch Bilden des Quotienten und Quadrieren überzeugt. Für $n = 5$ ist $\sqrt{5!/2} = \sqrt{60}$ keine ganze Zahl, und für $n = 6$ ist $\sqrt{6!/2} = \sqrt{360}$ keine ganze Zahl. Damit sind wir für alle $n \geq 5$ bei einem Widerspruch angelangt.

(7) Nach (5) enthält $\mathcal{A}_n$ keinen nichttrivialen Normalteiler, der auch in $\mathcal{S}_n$ noch normal ist. Nach (6) ist *jeder* Normalteiler von $\mathcal{A}_n$ auch in $\mathcal{S}_n$ noch normal. Also enthält $\mathcal{A}_n$ keinen nichttrivialen Normalteiler.

(8) Es ist $\langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle \trianglelefteq \mathcal{A}_4$, und dieser Normalteiler enthält zwar das Element $(1,2)(3,4)$, aber keinen Dreierzykel.