G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 04.11.04.

Algebra I, WS 04/05

Lösung 3

Aufgabe 13.

(1) Im folgenden beschreiben wir die Schritte des Bahnenalgorithmus. In der Praxis empfiehlt es sich, sich den Graphen schrittweise aufzubauen.

(a) Die folgende Lösung ist nicht eindeutig. Zur Unterscheidung schreiben wir die auftretenden Urbildfunktionen w_i mit i dem jeweiligen Element der base.

Schritt I. Betrachte die Bahn $G \cdot 3$. Schreibe $a := (1,2,3)$ und $b := (3,4,5)$.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{3\}$ mit $w_3(3) = 1$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{1,4\}$ mit $w_3(1) = a$ und $w_3(4) = b$. Dem Erzeugendensystem S_3 von $\mathrm{Stab}_G(3)$ wird nichts hinzugefügt.

Schritt 3. Kandidaten $K = \{2,5\}$ mit $w_3(2) = a^2$ und $w_3(5) = b^2$. Wegen $ba3 = 1 = a3$ wird $a^{-1}ba = (2,4,5)$ zu S_3 hinzugefügt. Wegen $ab3 = b3$ wird $b^{-1}ab = (1,2,5)$ zu S_3 hinzugefügt.

Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Wegen $a^3 3 = 3$ wird $a^3 = 1$ zu S_3 hinzugefügt. Wegen $ba^2 3 = 2 = a^2 2$ wird $a^{-1}ba^2 = (1,4,5)$ zu S hinzugefügt. Wegen $ab^2 3 = 5 = b^2 3$ wird $b^{-2}ab^2 = (1,2,4)$ zu S_3 hinzugefügt.

Nun ist $(1,4,5) = ({}^{(1,2,5)}(2,4,5))^{-1}$ und $(1,2,4) = ({}^{(2,4,5)}(1,2,5))^{-1}$, und so $\mathrm{Stab}_G(3) = \langle S \rangle = \langle (2,4,5), (2,1,5) \rangle$.

Schritt II. Betrachte die Bahn $\mathrm{Stab}_G(3) \cdot 2$. Schreibe $c := a^2ba = (2,4,5)$ und $d := b^2a^2b = (2,1,5)$.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{2\}$ mit $w_2(2) = 1$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{4,1\}$ mit $w_2(4) = c$ und $w_2(1) = d$. Dem Erzeugendensystem S_2 von $\mathrm{Stab}_G(3,2)$ wird nichts hinzugefügt.

Schritt 3. Kandidaten $K = \{5\}$ mit $w(5) = c^2$. Wegen $dc2 = 4 = c2$ wird $c^{-1}dc = (5,1,4)$ zu S_2 hinzugefügt. Wegen $cd2 = 1 = d2$ wird $d^{-1}cd = (5,4,1)$ zu S_2 hinzugefügt. Wegen $d^2 2 = c^2 2$ wird $c^{-2}d^2 = (1,4,5)$ zu S_2 hinzugefügt.

Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Wegen $c^3 2 = 2$ wird $c^3 = 1$ zu S_2 hinzugefügt. Wegen $dc^2 2 = 2$ wird $dc^2 = (1,5,4)$ zu S_2 hinzugefügt.

Insgesamt wird $\mathrm{Stab}_G(3,2) = \langle S_2 \rangle = \langle (1,4,5) \rangle$.

Schritt III. Betrachte die Bahn $\mathrm{Stab}_G(3,2) \cdot 1$. Schreibe $e := c^2dc = aba^2 = (1,4,5)$. Hier müßte man auf die Produktdarstellung von c und d in a und b zurückgreifen, wenn nicht die einfachere Darstellung $aba^2 = (1,4,5)$ bereits in Schritt I aufgetaucht wäre.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{1\}$ mit $w_1(1) = 1$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{4\}$ mit $w_1(4) = e$. Dem Erzeugendensystem S_1 von $\mathrm{Stab}_G(3,2,1)$ wird nichts hinzugefügt.

Schritt 3. Kandidaten $K = \{5\}$ mit $w_1(5) = e^2$. Dem Erzeugendensystem S_1 wird nichts hinzugefügt.

Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Wegen $e^3 1 = 1$ wird $e^3 = 1$ zu S_1 hinzugefügt.

Insgesamt wird $\mathrm{Stab}_G(3,2,1) = \langle S_1 \rangle = 1$.

Wir erhalten als base das Tupel $(3,2,1)$ und als strong generators die folgende Tafel.

$$
\begin{array}{lllll}
w_3(1) & = & a & = & (1,2,3) \\
w_3(2) & = & a^2 & = & (1,3,2) \\
w_3(3) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_3(4) & = & b & = & (3,4,5) \\
w_3(5) & = & b^2 & = & (3,5,4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
w_2(1) & = & b^2a^2b & = & (1,5,2) \\
w_2(2) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_2(4) & = & a^2ba & = & (2,4,5) \\
w_2(5) & = & a^2b^2a & = & (2,5,4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
w_1(1) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_1(4) & = & aba^2 & = & (1,4,5) \\
w_1(5) & = & ab^2a^2 & = & (1,5,4)
\end{array}
$$

(b) Wegen der Indizes $G \overset{5}{\geq} \mathrm{Stab}_G(3) \overset{4}{\geq} \mathrm{Stab}_G(3,2) \overset{3}{\geq} \mathrm{Stab}_G(3,2,1) = 1$ ist $|G| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

(c) Es ist $(1,3,5)3 = 5$, also $(1,3,5)$ in G genau dann, wenn $w_3(5)^{-1}(1,3,5) = (1,4,5)$ in $\mathrm{Stab}_G(3)$.

Nun ist $2(1,4,5) = 2$, also $(1,4,5)$ in $\mathrm{Stab}_G(3)$ genau dann, wenn $w_2(2)^{-1}(1,4,5) = (1,4,5)$ in $\mathrm{Stab}_G(3,2)$. In der Tat ist $(1,4,5) = e = aba^2$. Rückwärts gerechnet erhalten wir

$$(1,3,5) \;=\; w_3(5)(1,4,5) \;=\; b^2aba^2 \;.$$

An dieser Stelle empfiehlt sich als Probe ein direktes Nachrechnen.

(2) Sei $G = \langle (1,2,3,4,5,6),(1,4)\rangle \leq \mathcal{S}_6$.

(a) **Schritt I.** Betrachte die Bahn $G \cdot 1$. Schreibe $a := (1,2,3,4,5,6)$ und $b := (1,4)$. Sei S_1 das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu S_1 unterschlagen wir.
Schritt 1. Kandidaten $K = \{1\}$ mit $w_1(1) = 1$.
Schritt 2. Kandidaten $K = \{2,4\}$ mit $w_1(2) = a$ und $w_1(4) = b$.
Schritt 3. Kandidaten $K = \{3,5\}$ mit $w_1(3) = a^2$, $w_1(5) = ab$. Ergänze S_1 um $a^{-1}ba = (3,6)$.
Schritt 4. Kandidaten $K = \{6\}$ mit $w_1(6) = a^2b$. Ergänze S_1 um $a^{-2}ba^2 = (2,5)$.
Wir erhalten $\mathrm{Stab}_G(1) = \langle S_1\rangle = \langle a^{-1}ba, a^{-2}ba^2\rangle = \langle (2,5),(3,6)\rangle$.
Schritt II. Betrachte die Bahn $\mathrm{Stab}_G(1)\cdot 2$. Sei S_2 das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu S_2 unterschlagen wir.
Schritt 1. Kandidaten $K = \{2\}$ mit $w_2(2) = 1$.
Schritt 2. Kandidaten $K = \{5\}$ mit $w_2(5) = a^{-2}ba^2$. Ergänze S_2 um $a^{-1}ba$.
Schritt 3. Kandidaten $K = \emptyset$.
Wir erhalten $\mathrm{Stab}_G(1,2) = \langle S_2\rangle = \langle a^{-1}ba\rangle = \langle (3,6)\rangle$.
Schritt III. Betrachte die Bahn $\mathrm{Stab}_G(1)\cdot 3$. Sei S_2 das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu S_2 unterschlagen wir.
Schritt 1. Kandidaten $K = \{3\}$ mit $w_3(3) = 1$.
Schritt 2. Kandidaten $K = \{6\}$ mit $w_3(6) = a^{-1}ba$.
Schritt 3. Kandidaten $K = \emptyset$.
Wir erhalten $\mathrm{Stab}_G(1,2,3) = \langle S_3\rangle = \langle\emptyset\rangle = 1$.
Wir erhalten als base das Tupel $(1,2,3)$, und als strong generators die folgende Tafel.

$$\begin{array}{lllll}
w_1(1) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_1(2) & = & a & = & (1,2,3,4,5,6) \\
w_1(3) & = & a^2 & = & (1,3,5)(2,4,6) \\
w_1(4) & = & b & = & (1,4) \\
w_1(5) & = & ab & = & (1,5,6)(2,3,4) \\
w_1(6) & = & a^2b & = & (1,6,2,4,3,5)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
w_2(2) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_2(5) & = & a^{-2}ba^2 & = & (2,5)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
w_3(3) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\
w_3(6) & = & a^{-1}ba & = & (3,6)
\end{array}$$

(b) Wegen der Indizes $G \overset{6}{\geq} \mathrm{Stab}_G(1) \overset{2}{\geq} \mathrm{Stab}_G(1,2) \overset{2}{\geq} \mathrm{Stab}_G(1,2,3) = 1$ ist $|G| = 6\cdot 2\cdot 2 = 24$.

(c) Es ist $(1,2)1 = 2$, und also $(1,2)$ in G genau dann, wenn $w_1(2)^{-1}(1,2) = (1,6,5,4,3,2)(1,2) = (2,6,5,4,3)$ in $\mathrm{Stab}_G(1)$. Nun ist $(2,6,5,4,3)2 = 6$, und also wegen $\mathrm{Stab}_G(1)\cdot 2 = \{2,5\}$ in der Tat $(2,6,5,4,3)$ nicht in $\mathrm{Stab}_G(1)$. Folglich ist $(1,2) \notin G$.

(d) Zur Berechnung des Zentrums wenden wir den verfeinerten Bahnenalgorithmus auf die Operation von G auf sich selbst via Konjugation an. Beachte, daß $\mathrm{Stab}_G(a,b) = \mathrm{Z}(G)$, da ein Element, das mit a und b vertauscht, auch mit jedem Element von $\langle a,b\rangle = G$ vertauscht.
Schritt I. Betrachte die Bahn ${}^G(1,4)$. Sei $S_{(1,4)}$ das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu $S_{(1,4)}$ unterschlagen wir.
Schritt 1. Kandidaten $K = \{(1,4)\}$.
Schritt 2. Kandidaten $K = \{(2,5)\}$. Ergänze $S_{(1,4)}$ um b.
Schritt 3. Kandidaten $K = \{3,6\}$. Ergänze $S_{(1,4)}$ um $a^{-1}ba$.
Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Ergänze $S_{(1,4)}$ um a^3.
Wir erhalten $\mathrm{Stab}_G((1,4)) = \langle S_{(1,4)}\rangle = \langle (1,4),(2,5),(1,4)(2,5)(3,6)\rangle = \langle (1,4),(2,5),(3,6)\rangle$.
Schritt II. Betrachte die Bahn ${}^G(1,2,3,4,5,6)$. Sei $S_{(1,2,3,4,5,6)}$ das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu $S_{(1,2,3,4,5,6)}$ unterschlagen wir.
Schritt 1. Kandidaten $K = \{(1,2,3,4,5,6)\}$.
Schritt 2. Kandidaten $K = \{(1,5,6,4,2,3),(1,5,3,4,2,6),(1,2,6,4,5,3)\}$.
Schritt 3. Kandidaten $K = \emptyset$.
Schritt 3. Kandidaten $K = \{3,6\}$. Ergänze $S_{(1,4)}$ um $a^{-1}ba$.
Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Ergänze $S_{(1,2,3,4,5,6)}$ um a^3.
Wir erhalten $\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Stab}_G((1,4),(1,2,3,4,5,6)) = \langle S_{(1,2,3,4,5,6)}\rangle = \langle (1,4)(2,5)(3,6)\rangle$.

Beachte, daß das Verfahren an dieser Stelle nicht fortgesetzt werden kann - über den Kern der Operation, welcher hier das Zentrum der Gruppe darstellt, sagt der verfeinerte Bahnenalgorithmus nichts. Nur sind wir hier in der glücklichen Lage, als Zentrum eine zyklische Gruppe vorzufinden, welche von einem Element der Ordnung 2 erzeugt wird, und haben somit $|\mathrm{Z}(G)| = 2$.

Wir bemerken noch, daß die vorstehende Berechnung des Zentrums wegen der Indizes $G \overset{3}{\geq} \mathrm{Stab}_G((1,4)) \overset{4}{\geq} \mathrm{Stab}_G((1,4),(1,2,3,4,5,6)) \overset{2}{\geq} 1$ auch nochmals $|G| = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ liefert.

Eine base und strong generators erhalten wir mit dieser Rechnung allerdings nicht.

Auch zur Feststellung, ob und wie ein gegebenes Element von $\mathcal{S}_6$ sich in G befindet, taugt diese Rechnung nur bedingt - man muß dazu alle Elemente des Zentrums kennen. Dies ist hier zwar der Fall, im allgemeinen erfordert dies aber eine weitere Untersuchung.

(3) (a) **Lösungsweg 1.** Wir betrachten die Operation auf $\mathbf{F}_5^2$.

Schritt I. Betrachte die Bahn $G \cdot \binom{1}{0}$. Sei $S_{\binom{1}{0}}$ das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu $S_{\binom{1}{0}}$ unterschlagen wir.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{\binom{1}{0}\}$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{\binom{1}{-1}, \binom{0}{1}\}$.

Schritt 3. Kandidaten $K = \{\binom{0}{-2}, \binom{-1}{1}, \binom{1}{1}\}$.

Schritt 4. Kandidaten $K = \{\binom{-2}{-2}, \binom{-2}{0}, \binom{0}{2}, \binom{2}{0}\}$. Ergänze $S_{\binom{1}{0}}$ um $ba^3bab = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Schritt 5. Kandidaten $K = \{\binom{-2}{2}, \binom{2}{2}, \binom{2}{-2}\}$.

Schritt 6. Kandidaten $K = \{\binom{0}{-1}, \binom{-1}{0}\}$.

Schritt 7. Kandidaten $K = \{\binom{-1}{-1}\}$.

Damit bekommen wir $\mathrm{Stab}_G(\binom{1}{0})$ und die Indizes $G \overset{16}{\geq} \mathrm{Stab}_G(\binom{1}{0}) \overset{2}{\geq} 1$, also $|G| = 16 \cdot 2 = 32$.

Lösungsweg 2. Da nach dem Zentrum gefragt ist, kann man auch die Operation von G auf sich via Konjugation zu betrachten.

Schritt I. Betrachte die Bahn ${}^G\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $S_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu $S_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ unterschlagen wir.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Ergänze $S_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ um $b = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Schritt 3. Kandidaten $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Schritt 4. Kandidaten $K = \emptyset$. Ergänze $S_{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}$ um $aba = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Damit bekommen wir $\mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Schritt II. Betrachte die Bahn ${}^G\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Sei $S_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ das zu bildende Erzeugendensystem des Stabilisators. Wirkungslose Ergänzungen zu $S_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ unterschlagen wir.

Schritt 1. Kandidaten $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Schritt 2. Kandidaten $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Ergänze $S_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)}$ um $bc = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Schritt 3. Kandidaten $K = \emptyset$.

Damit bekommen wir $\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$. Es handelt sich um ein Element der Ordnung 4, so daß sich $|\mathrm{Z}(G)| = 4$ ergibt.

Ferner wird auch auf diesem Wege $G \overset{4}{\geq} \mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) \overset{2}{\geq} \mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)) \overset{4}{\geq} 1$, also $|G| = 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$.

(b) Siehe Lösungsweg 2 unter (a).

Aufgabe 14.

(1) Folgendes sind die Konjugiertenklassen von G, wie man mit dem Bahnenalgorithmus bestätigt.

$$\begin{array}{l}
\{ \text{id} \} \\
\{ (1,2,3,4,5,6),\ (1,6,5,4,3,2) \} \\
\{ (1,6)(2,5)(3,4),\ (1,2)(3,6)(4,5),\ (1,4)(2,3)(5,6) \} \\
\{ (1,3,5)(2,4,6),\ (1,5,3)(2,6,4) \} \\
\{ (1,4)(2,5)(3,6) \} \\
\{ (2,6)(3,5),\ (1,5)(2,4),\ (1,3)(4,6) \}
\end{array}$$

Beobachte hierbei, daß Konjugiertenklassen von $\mathcal{S}_6$, geschnitten mit G, im allgemeinen in eine disjunkte Vereinigung von Konjugiertenklassen von G zerfallen. Man hätte sich auch auf die erstgenannte Einteilung von G beziehen können, das hätte aber eventuell zu Mißverständnissen Anlaß gegeben.

Die Fixpunkte sind diejenigen Abbildungen f, die auf einem Zykel konstant sind. So läßt z.B. $(2,6)(3,5) = (1)(2,6)(3,5)(4)$ gerade m^4 Abbildungen konstant, nämlich diejenigen mit $f(2) = f(6)$ und $f(3) = f(5)$. Der Exponent ist durch die Anzahl der Zykel bestimmt, so man die Zykel der Länge 1 mitzählt.

Mit Burnsides Lemma wird also die Anzahl $a(m)$ der Bahnen, d.h. der Perlenkettenfärbungen, zu

$$a(m) \;=\; \frac{1}{12}(m^6 + 3m^4 + 4m^3 + 2m^2 + 2m^1)\,.$$

Wie folgt hieraus, daß $a(m)$ für alle $m \in \mathbf{Z}$ einen ganzzahligen Wert annimmt?

Also z.B. $a(0) = 0$, $a(1) = 1$, $a(2) = 13$, $a(3) = 92$, $a(4) = 430$, $a(5) = 1505$, $a(6) = 4291$, ...

(2) Seien $n,\, m \geq 0$. Von der Menge $[1,n]$ in die Menge $[1,m]$ gibt es gerade

$$f(n,m) \;:=\; \sum_{k\in[0,m]} (-1)^{m-k} \tbinom{m}{k} k^n$$

surjektive Abbildungen, wie man mit Induktion nach m folgendermaßen sieht. Die Anzahl der Surjektionen von $[1,n]$ nach $[1,m]$ ist gleich der Anzahl der Abbildungen von $[1,n]$ nach $[1,m]$, also m^n, minus der Summe der surjektiven Abbildungen in eine echte Teilmenge von $[1,m]$, summiert über diese Teilmengen. Das ergibt

$$\begin{array}{rcl}
f(n,m) & = & m^n - \sum_{l\in[0,m-1]} \binom{m}{l} f(n,l) \\
& = & m^n - \sum_{l\in[0,m-1]} \sum_{k\in[0,l]} (-1)^{l-k} \binom{m}{l} \binom{l}{k} k^n \\
& = & m^n - \sum_{l\in[0,m-1]} \sum_{k\in[0,l]} (-1)^{l-k} \binom{m}{k} \binom{m-k}{l-k} k^n \\
& = & m^n - \sum_{k\in[0,m-1]} \sum_{l\in[k,m-1]} (-1)^{l-k} \binom{m}{k} \binom{m-k}{l-k} k^n \\
& = & m^n - \sum_{k\in[0,m-1]} \binom{m}{k} k^n \left(\sum_{l\in[0,m-k-1]} (-1)^l \binom{m-k}{l} \right) \\
& = & m^n - \sum_{k\in[0,m-1]} \binom{m}{k} k^n \left(-(-1)^{m-k} + \underbrace{\sum_{l\in[0,m-k]} (-1)^l \binom{m-k}{l}}_{=0} \right) \\
& = & m^n + \sum_{k\in[0,m-1]} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^n\,.
\end{array}$$

Zurück zum eigentlichen Problem. Die Konjugiertenklassen von H sind die folgenden, wie man mit dem Bahnenalgorithmus bestätigt.

$$\begin{array}{l}
\{ \text{id} \} \\
\{ (1,3,6,4),\ (2,3,5,4),\ (1,4,6,3),\ (1,2,6,5),\ (2,4,5,3),\ (1,5,6,2) \} \\
\{ (1,6)(3,4),\ (2,5)(3,4),\ (1,6)(2,5) \} \\
\{ (1,2,4)(3,6,5),\ (1,3,5)(2,6,4),\ (1,2,3)(4,6,5),\ (1,4,5)(2,6,3), \\
\quad (1,4,2)(3,5,6),\ (1,5,3)(2,4,6),\ (1,3,2)(4,5,6),\ (1,5,4)(2,3,6) \} \\
\{ (1,2)(3,4)(5,6),\ (1,6)(2,4)(3,5),\ (1,5)(2,6)(3,4),\ (1,6)(2,3)(4,5),\ (1,4)(2,5)(3,6),\ (1,3)(2,5)(4,6) \}
\end{array}$$

Eine Element aus H fixiert eine Abbildung, falls diese auf seinen Zykeln konstant ist. Mit obiger Formel für die Anzahl der Surjektionen und Burnsides Lemma erhalten wir somit für die Anzahl $a'(m)$ der Bahnen, d.h. der Würfelfärbungen,

$$a'(m) := \frac{1}{24}(f(6,m)+6f(3,m)+3f(4,m)+8f(2,m)+6f(3,m)) \;=\; \frac{1}{24}\sum_{k\in[0,m]}(-1)^{m-k}\tbinom{m}{k}\,(k^6+3k^4+12k^3+8k^2)\,.$$

Also $a'(0)=0$, $a'(1)=1$, $a'(2)=8$, $a'(3)=30$, $a'(4)=68$, $a'(5)=75$, $a'(6)=30$, $a'(7)=0$, ...

Aufgabe 15.

(1) Aussage ist richtig. In der Tat ist $\operatorname{Fix}_M({}^g x) = g\operatorname{Fix}_M(x)$, da ein Element $m\in M$ in der linken Seite enthalten ist genau dann, wenn $gxg^{-1}m=m$, d.h. genau dann, wenn $xg^{-1}m=g^{-1}m$, d.h. genau dann, wenn $g^{-1}m\in\operatorname{Fix}_M(g)$, d.h. genau dann, wenn $m\in g\operatorname{Fix}_M(x)$, d.h. genau dann, wenn m in der rechten Seite enthalten ist. Und die Multiplikation mit g ist eine Bijektion von M in sich, ändert also die Elementzahl nicht.

(2) Die Aussage ist richtig. Denn mit Burnsides Lemma und mit (1) wird

$$\begin{array}{rcl} |G\backslash M| &=& \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}|\operatorname{Fix}_M(y)| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in\operatorname{ConjCl}(G)}\sum_{y\in {}^G x}|\operatorname{Fix}_M(y)| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in\operatorname{ConjCl}(G)}\sum_{y\in {}^G x}|\operatorname{Fix}_M(x)| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in\operatorname{ConjCl}(G)}|{}^G x||\operatorname{Fix}_M(x)| \\ &=& \sum_{x\in\operatorname{ConjCl}(G)}\frac{|\operatorname{Fix}_M(x)|}{|\mathrm{C}_G(x)|}\,. \end{array}$$

(3) Die Aussage ist richtig. Denn da die Anzahl der G-Bahnen der G-Menge G/U gleich 1 ist, wird mit Burnsides Lemma

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\operatorname{Fix}_{G/U}(x)| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\{gU \;:\; xgU=gU\}| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\{gU \;:\; g^{-1}xgU=U\}| \\ &=& \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\{gU \;:\; {}^{g^{-1}}x\in U\}|\,. \end{array}$$

(4) Die Aussage ist falsch. Sind z.B. $G=\mathcal{S}_3$, $U=\langle(1,2)\rangle$ und $M=G/U=\{U,\ (1,2,3)U,\ (1,3,2)U\}$ mit $|M|=3$, so zerfällt $M\times M$ nur in die 2 Bahnen

$$\begin{array}{l} \{(U,U),((1,2,3)U,(1,2,3)U),\ ((1,3,2)U,(1,3,2)U)\}, \\ \{(U,(1,2,3)U),\ (U,(1,3,2)U),\ ((1,2,3)U,(1,3,2)U),\ ((1,2,3)U,U),\ ((1,3,2)U,U),\ ((1,3,2)U,(1,2,3)U)\}\,, \end{array}$$

wie man mit dem Bahnenalgorithmus bestätigt.

(5) Aussage ist richtig. In der Tat ist $\operatorname{Fix}_{M\times M}(x) = \operatorname{Fix}_M(x)\times\operatorname{Fix}_M(x)$, und dementsprechend $|\operatorname{Fix}_{M\times M}(x)| = |\operatorname{Fix}_M(x)|$. Burnsides Lemma gibt nun

$$|G\backslash(M\times M)| \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\operatorname{Fix}_{M\times M}(x)| \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|\operatorname{Fix}_M(x)|^2\,.$$