G. Nebe, M. Künzer

Algebra I, WS 04/05

Lösung 2

Aufgabe 8.

(1) Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S}_G \\ x & \longmapsto & (\gamma(x) : g \longmapsto xg). \end{array}$$

Diese ist ein injektiver Morphismus von Gruppen, da zum einen stets $\gamma(xy) = \gamma(x) \circ \gamma(y)$ gilt, und da zum anderen aus $\gamma(x) = \mathrm{id}_G$ wegen $(\gamma(x))(1) = x$ und $\mathrm{id}_G(1) = 1$ folgt, daß $x = 1$. Somit ist G isomorph zur Untergruppe $\gamma(G)$ von $\mathcal{S}_G$.

Sei $[1, n] \xrightarrow[\sim]{\varphi} G$ eine Bijektion. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_G & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{S}_n \\ \sigma & \longmapsto & \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi \\ \varphi \circ \rho \circ \varphi^{-1} & \longleftarrow\!\!| & \rho \end{array}$$

ein Isomorphismus, und mithin G isomorph zur Untergruppe $\psi(\gamma(G))$ von $\mathcal{S}_n$. (Anschaulich bezeichnet ψ lediglich ein Numerieren der Zykeleinträge auf eine durch Wahl von φ festgelegte Weise.)

(2) Es genügt mit (1) zu zeigen, daß $\mathcal{S}_n$ eine Untergruppe von $\mathcal{A}_{2n}$ ist. Dazu definieren wir die *Verdopplungsabbildung* ϑ, die einem $\sigma \in \mathcal{S}_n$ die Permutation

$$\begin{array}{rcl} [1, 2n] & \xrightarrow{\vartheta(\sigma)} & [1, 2n] \\ i & \longmapsto & \begin{cases} \sigma(i) & \text{falls } i \in [1, n] \\ \sigma(i - n) + n & \text{falls } i \in [n + 1, 2n] \end{cases} \end{array}$$

zuordnet. Es ist ϑ ein Morphismus von Gruppen, da $(\vartheta(\sigma \circ \rho))(i) = (\vartheta(\sigma) \circ \vartheta(\rho))(i)$ für $i \in [1, n]$ und für $i \in [n+1, 2n]$. Ferner ist ϑ injektiv, da $\vartheta(\sigma)|_{[1,n]} = \sigma$.

Schließlich enthält die Zykeldarstellung von $\vartheta(\sigma)$ von jeder Zykellänge gerade doppelt so viele Zykel wie σ, und also insbesondere von den Zykeln gerader Länge je eine gerade Anzahl. Damit ist in der Tat $\vartheta(\sigma) \in \mathcal{A}_{2n}$.

(3) Etwa ist $G = C_2$ nicht isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_3 \simeq C_3$.

Aufgabe 9.

Wir wählen z.B. folgende Repräsentanten der Linksnebenklassen. Dabei muß einfach nur bei der anstehenden Wahl des nächsten Repräsentanten ein Element genommen werden, welches noch nicht in der Vereinigung der bisherigen Linksnebenklassen auftritt.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}\, C_4 & = & \{\mathrm{id},\ (1,2,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,3,2)\} \\ (1,2)C_4 & = & \{(1,2), (1,3,2,4), (1,4,3), (2,3,4)\} \\ (1,3)C_4 & = & \{(1,3), (2,4), (1,4)(2,3), (1,2)(3,4)\} \\ (2,3)C_4 & = & \{(2,3), (1,2,4,3), (1,4,2), (1,3,4)\} \\ (1,2,3)C_4 & = & \{(1,2,3), (2,4,3), (1,4), (1,3,4,2)\} \\ (1,3,2)C_4 & = & \{(1,3,2), (1,2,4), (1,4,2,3), (3,4)\} \end{array}$$

(1) Der Erzeuger $(1, 3)$ von C_2 operiert wie folgt.

$$\begin{array}{lcl} (1,3)(\mathrm{id}\, C_4) & = & (1,3)C_4 \\ (1,3)((1,2)C_4) & = & (1,2,3)C_4 \\ (1,3)((1,3)C_4) & = & \mathrm{id}\, C_4 \\ (1,3)((2,3)C_4) & = & (1,3,2)C_4 \\ (1,3)((1,2,3)C_4) & = & (1,2)C_4 \\ (1,3)((1,3,2)C_4) & = & (2,3)C_4 \end{array}$$

(Diese Rechnung wurde durch die Wahl der Repräsentanten vereinfacht. Im allgemeinen ist das Produkt eines Erzeugers mit einem Repräsentanten kein Repräsentant, und man muß in obiger Linksnebenklassentabelle den Repräsentanten suchen.)

Mit dem Bahnenalgorithmus ergeben sich nun für die Bahn von $\mathrm{id}\, C_4$ sukzessive folgende Teilmengen.

$$\begin{array}{lcllcl} K & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} & B & = & \emptyset \\ K & = & \{(1,3)C_4\} & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} \\ K & = & \emptyset & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4, (1,3)C_4\}\,. \end{array}$$

Genauso für die anderen Bahnen. Insgesamt erhalten wir die folgenden Bahnen.

$$\{\mathrm{id}\, C_4, (1,3)C_4\},\ \{(1,2)C_4, (1,2,3)C_4\},\ \{(2,3)C_4, (1,3,2)C_4\}$$

(2) Der Erzeuger $(1,2,3,4)$ von C_4 operiert wie folgt.

$$\begin{array}{lclcl} (1,2,3,4)(\mathrm{id}\, C_4) & = & (1,2,3,4)C_4 & = & \mathrm{id}\, C_4 \\ (1,2,3,4)((1,2)C_4) & = & (1,3,4)C_4 & = & (2,3)C_4 \\ (1,2,3,4)((1,3)C_4) & = & (1,4)(2,3)C_4 & = & (1,3)C_4 \\ (1,2,3,4)((2,3)C_4) & = & (1,2,4)C_4 & = & (1,3,2)C_4 \\ (1,2,3,4)((1,2,3)C_4) & = & (1,3,2,4)C_4 & = & (1,2)C_4 \\ (1,2,3,4)((1,3,2)C_4) & = & (1,4)C_4 & = & (1,2,3)C_4 \end{array}$$

Mit dem Bahnenalgorithmus ergeben sich nun für die Bahn von $(1,2)C_4$ sukzessive folgende Teilmengen.

$$\begin{array}{lcllcl} K & = & \{(1,2)C_4\} & B & = & \emptyset \\ K & = & \{(2,3)C_4, (1,2,3)C_4\} & B & = & \{(1,2)C_4\} \\ K & = & \{(1,3,2)C_4\} & B & = & \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4\} \\ K & = & \emptyset & B & = & \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4\} \end{array}$$

Genauso für die anderen Bahnen. Insgesamt erhalten wir die folgenden Bahnen.

$$\{\mathrm{id}\, C_4\}, \{(1,3)C_4\},\ \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4\}$$

(3) Die Erzeuger von D_8 operieren wie unter (1) und (2) angeführt. Mit dem Bahnenalgorithmus ergeben sich nun für die Bahn von $\mathrm{id}\, C_4$ sukzessive folgende Teilmengen.

$$\begin{array}{lcllcl} K & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} & B & = & \emptyset \\ K & = & \{(1,3)C_4\} & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} \\ K & = & \emptyset & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4, (1,3)C_4\}\,. \end{array}$$

Für die Bahn von $(1,2)C_4$ ergeben sich sukzessive folgende Teilmengen.

$$\begin{array}{lcllcl} K & = & \{(1,2)C_4\} & B & = & \emptyset \\ K & = & \{(2,3)C_4, (1,2,3)C_4\} & B & = & \{(1,2)C_4\} \\ K & = & \{(1,3,2)C_4\} & B & = & \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4\} \\ K & = & \emptyset & B & = & \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4\} \end{array}$$

Damit erhalten wir folgende Bahnen.

$$\{\mathrm{id}\, C_4, (1,3)C_4\},\ \{(1,2)C_4, (2,3)C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4\}$$

(4) Wir wählen für $\mathcal{A}_4$ die Darstellung als Erzeugnis $\mathcal{A}_4 = \langle (1,2,3), (1,2)(3,4) \rangle$.

Der Erzeuger $(1,2,3)$ operiert wie folgt.

$$\begin{array}{lcl} (1,2,3)(\mathrm{id}\, C_4) & = & (1,2,3)C_4 \\ (1,2,3)((1,2)C_4) & = & (1,3)C_4 \\ (1,2,3)((1,3)C_4) & = & (2,3)C_4 \\ (1,2,3)((2,3)C_4) & = & (1,2)C_4 \\ (1,2,3)((1,2,3)C_4) & = & (1,3,2)C_4 \\ (1,2,3)((1,3,2)C_4) & = & \mathrm{id}\, C_4 \end{array}$$

Der Erzeuger $(1,2)(3,4)$ operiert wie folgt.

$$\begin{array}{lclcl}
(1,2)(3,4)(\mathrm{id}\, C_4) & = & (1,2)(3,4)C_4 & = & (1,3)C_4 \\
(1,2)(3,4)((1,2)C_4) & = & (3,4)C_4 & = & (1,3,2)C_4 \\
(1,2)(3,4)((1,3)C_4) & = & (1,4,3,2)C_4 & = & \mathrm{id}\, C_4 \\
(1,2)(3,4)((2,3)C_4) & = & (1,2,4,3)C_4 & = & (2,3)C_4 \\
(1,2)(3,4)((1,2,3)C_4) & = & (2,4,3)C_4 & = & (1,2,3)C_4 \\
(1,2)(3,4)((1,3,2)C_4) & = & (1,4,3)C_4 & = & (1,2)C_4
\end{array}$$

Mit dem Bahnenalgorithmus ergeben sich nun für die Bahn von $\mathrm{id}\, C_4$ sukzessive folgende Teilmengen.

$$\begin{array}{lcllcl}
K & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} & B & = & \emptyset \\
K & = & \{(1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4, (1,3)C_4\} & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4\} \\
K & = & \{(1,2)C_4, (2,3)C_4\} & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4, (1,3)C_4\}\ . \\
K & = & \emptyset & B & = & \{\mathrm{id}\, C_4, (1,2,3)C_4, (1,3,2)C_4, (1,3)C_4, (1,2)C_4, (2,3)C_4\}\ .
\end{array}$$

Unter der Operation von $\mathcal{A}_4$ hat $\mathcal{S}_4/C_4$ also nur eine Bahn, viz. $\mathcal{S}_4/C_4$.

Alternatives Argument (ohne Bahnenalgorithmus). Es ist der Stabilisator von $\mathrm{id}\, C_4$ gleich $\mathcal{A}_4 \cap C_4 = \langle (1,3)(2,4) \rangle$, und somit hat die Bahn von $\mathrm{id}\, C_4$ die Länge $|\mathcal{A}_4|/|\langle (1,3)(2,4) \rangle| = 12/2 = 6$.

Aufgabe 10.

(1) Auf der Menge aller Tupel der Länge p mit Einträgen in G ist auf die angegebene Weise, nämlich durch zyklische Vertauschung, eine Operation von C_p definiert. Wir müssen zeigen, daß diese Operation auf die Teilmenge M der Tupel mit Produkt 1 einschränkt. In der Tat ist für $(g_1, \ldots, g_p) \in M$ auch

$$g_p g_1 \cdots g_{p-1} \;=\; {}^{g_p}(g_1 \cdots g_p) \;=\; {}^{g_p}1 \;=\; 1\ .$$

(2) Es ist $(g_1, \ldots, g_p) = (g_p, g_1, \ldots, g_{p-1})$ genau dann, wenn $g_1 = g_2 = \cdots = g_1 =: g$ und $g^p = 1$. Folglich kann man z.B.

$$\mathrm{Fix}_{C_p}(M) \;=\; \{(g, \ldots, g) \;:\; g \in G,\ |\langle g \rangle| = p\} \cup \{(1, \ldots, 1)\}$$

schreiben.

Die C_p-Bahnen sind von Länge 1 oder von Länge p, und somit sind die Bahnen, die keinen Fixpunkt enthalten, von Länge p.

(3) Wegen

$$M \;=\; \{(g_1, \ldots, g_{p-1}, (g_1 \cdots g_{p-1})^{-1}) \;:\; g_i \in G \text{ beliebig für } i \in [1, p-1]\}$$

ist $|M| = |G|^{p-1}$ durch p teilbar. Da jede fixpunktfreie Bahn eine durch p teilbare Länge besitzt, und da die Summe $|M|$ der Bahnenlängen durch p teilbar ist, muß auch die Anzahl $|\mathrm{Fix}_{C_p}(M)|$ der Bahnen von Länge 1 durch p teilbar sein.

(4) Da es wenigstens eine Bahn der Länge 1 gibt, nämlich $\{(1, \ldots, 1)\}$, gibt es mit (3) wenigstens p Bahnen der Länge 1. Mithin gibt es wenigstens $p-1$ Elemente der Ordnung p, insbesondere also wenigstens eines.

Wo wurde benötigt, daß p prim ist?

Aufgabe 11.

Zur Erinnerung: ist G eine Gruppe und $x \in G$, so schreiben wir $\mathrm{C}_G(x) = \mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \;:\; {}^g x = x\}$.

(1) $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ Wir stellen uns die Frage, wann $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(K)$ im Stabilisator von $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ enthalten ist.

Ist $\mathrm{char}\, K = 2$, so ist $\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)}(\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)) = \mathrm{GL}_n(K)$, und die Länge seiner Konjugiertenklasse ist $|\,{}^{\mathrm{GL}_2(K)}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)| = 1$.

Ist $\mathrm{char}\, K \geq 3$, so muß

$$\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$$

sein, d.h. $b = 0$ und $c = 0$. Es sind folglich $a,\, d \in K \smallsetminus \{0\}$ beliebig, und so wird $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}))| = (q-1)^2$. Für die Länge der Konjugiertenklasse folgt

$$|{}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix})| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_2(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}))|} \;=\; q(q+1)\;.$$

$(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})$ Wir stellen uns die Frage, wann $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{GL}_2(K)$ im Stabilisator von $(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})$ enthalten ist. Dazu muß

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}) \;=\; (\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$$

sein, d.h. $a = d$ und $c = 0$. Es sind folglich $a \in K \smallsetminus \{0\}$ und $b \in K$ beliebig, und so wird $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}))| = (q-1)q$. Für die Länge der Konjugiertenklasse folgt

$$|{}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix})| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_2(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}))|} \;=\; q^2-1\;.$$

(2) Der selbe Ansatz wie für (1) liefert

$$\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix})) \;=\; \operatorname{GL}_2(K) \cap \left\{ \left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) \;:\; a, b \in K \right\}\;.$$

Nun ist $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right)$ invertierbar genau dann, wenn $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = a^2 + ab - b^2 \neq 0$.

Fall $X^2 - X - 1$ ohne Nullstelle in K. Ist $a = 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $b = 0$. Ist $a \neq 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$, was nicht eintritt. Somit ist $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))| = q^2 - 1$, und mithin

$$|{}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix})| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_2(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))|} \;=\; (q-1)q\;.$$

Fall $X^2 - X - 1 = (X - \xi)(X - \eta)$ mit $\xi,\, \eta \in K$, $\xi \neq \eta$. Ist $a = 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $b = 0$. Ist $a \neq 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$, d.h. zu $b = a\xi$ oder $b = a\eta$. Dies gibt $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))| = q^2 - 1 - 2(q-1) = (q-1)^2$, und also

$$|{}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix})| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_2(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))|} \;=\; (q+1)q\;.$$

Fall $X^2 - X - 1 = (X - \xi)^2$ mit $\xi \in K$. Ist $a = 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $b = 0$. Ist $a \neq 0$, so ist $\det\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&a+b\end{smallmatrix}\right) = 0$ äquivalent zu $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$, d.h. zu $b = a\xi$. Dies gibt $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))| = q^2 - 1 - (q-1) = (q-1)q$, und also

$$|{}^{\mathrm{GL}_2(K)}(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix})| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_2(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_2(K)}((\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}))|} \;=\; q^2-1\;.$$

(2) Sei M die Menge der m-dimensionalen Unterräume von K^n. Auf M operiert die $\operatorname{GL}_n(K)$ transitiv via Multiplikation. Sei $U = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$, wobei e_i den i-ten Standardbasisvektor bezeichne. Ein Element in $\operatorname{GL}_n(K)$ fixiert diesen Unterraum genau dann, wenn es an Position (i,j) den Eintrag 0 hat für alle $(i,j) \in [m+1, n] \times [1, m]$ (obere Blockdreiecksmatrix). Somit ist $|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)}(U)| = |\operatorname{GL}_m(K)| \cdot |\operatorname{GL}_{n-m}(K)| \cdot q^{m(n-m)}$. Die Anzahl der m-dimensionalen Unterräume von K^n ist daher

$$|M| \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_m(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)}(U)|} \;=\; \frac{|\operatorname{GL}_m(K)|}{|\operatorname{GL}_m(K)| \cdot |\operatorname{GL}_{n-m}(K)| \cdot q^{m(n-m)}} \;=\; \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\cdots(q^{n-m+1} - 1)}{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)\cdots(q^1 - 1)} \;=:\; \left[\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right]_q$$

(*Gaußscher Binomialkoeffizient*).

(3) Sei M die Menge der Matrizen von Rang m in $K^{n\times n}$. Es wird M vermöge $(U, V) \cdot A := UAV^{-1}$ für $A \in M$ zu einer $\operatorname{GL}_n(K) \times \operatorname{GL}_n(K)$-Menge. Genauer, der Gaußsche Algorithmus lehrt uns, daß M gleich der Bahn von $D := \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})$ ist.

Der Stabilisator von D berechnet sich folgendermaßen. Schreibe $U = \left(\begin{smallmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ und $V^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \bar{V}_{1,1} & \bar{V}_{1,2} \\ \bar{V}_{2,1} & \bar{V}_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$ als Blockmatrizen, mit $U_{1,1},\, \bar{V}_{1,1} \in K^{m\times m}$ etc.

Aus der Bedingung

$$D \;=\; \left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \;\stackrel{!}{=}\; UDV^{-1} \;=\; \left(\begin{smallmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \bar{V}_{1,1} & \bar{V}_{1,2} \\ \bar{V}_{2,1} & \bar{V}_{2,2} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} U_{1,1}\bar{V}_{1,1} & U_{1,1}\bar{V}_{1,2} \\ U_{2,1}\bar{V}_{1,1} & U_{2,1}\bar{V}_{1,2} \end{smallmatrix}\right)$$

folgt zunächst, daß $U_{1,1} \in \mathrm{GL}_m(K)$ mit $\bar{V}_{1,1} = U_{1,1}^{-1}$. Sodann folgt $U_{2,1} = 0$ und $\bar{V}_{1,2} = 0$, und daher $U_{2,2}, \bar{V}_{2,2} \in \mathrm{GL}_{n-m}(K)$. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so stabilisiert (U,V) das Element $D \in M$.

Wegen der Wahlfreiheit für $U_{1,2} \in K^{m\times(n-m)}$ und $\bar{V}_{2,1} \in K^{(n-m)\times m}$ erhalten wir

$$|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)\times\mathrm{GL}_n(K)}(D)| \;=\; |\,\mathrm{GL}_m(K)| \cdot |\,\mathrm{GL}_{n-m}(K)|^2 \cdot q^{2m(n-m)}\;.$$

Somit ergibt sich die Anzahl der Matrizen von Rang m zu

$$|M| \;=\; \frac{|\,\mathrm{GL}_n(K)\times\mathrm{GL}_n(K)|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{GL}_n(K)\times\mathrm{GL}_n(K)}(D)|} \;=\; \left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]^2 |\,\mathrm{GL}_m(K)| \;=\; \frac{[n]_q!^{\,2}}{[n-m]_q!^{\,2}[m]_q!}\; q^{\binom{m}{2}}\;,$$

wobei $[k]_q! := \prod_{i\in[1,k]}(q^i - 1)$ für $k \geq 0$.

Aufgabe 12.

(1) Aussage ist richtig. Dazu haben wir zu zeigen, daß $\mathrm{Stab}_G({}^h g) = {}^h\mathrm{Stab}_G(g)$ für $g,\, h \in G$. Ein Element $x \in G$ liegt in der linken Seite genau dann, wenn ${}^x({}^h g) = {}^h g$, d.h. genau dann, wenn ${}^{h^{-1}xh}g = g$, d.h. genau dann, wenn ${}^{h^{-1}}x \in \mathrm{Stab}_G(g)$, d.h. genau dann, wenn $x \in {}^h\mathrm{Stab}_G(g)$, d.h. genau dann, wenn es in der rechten Seite liegt.

(2) Aussage ist falsch. Z.B. sind die Normalisatoren der isomorphen Untergruppen $\langle(1,2)\rangle$ und $\langle(1,2)(3,4)\rangle$ in $\mathcal{S}_4$ nicht isomorph. In der Tat ist der Normalisator von $\langle(1,2)\rangle$ gleich $\langle(1,2),(3,4)\rangle$, enthält also 4 Elemente, wohingegen der Normalisator von $\langle(1,2)(3,4)\rangle$ gleich $\langle(1,4,2,3),(1,2)\rangle$ ist und 8 Elemente enthält.

(3) Aussage ist richtig. Wir behaupten genauer, daß $\mathrm{N}_G(\alpha(U)) = \alpha(\mathrm{N}_G(U))$. Es liegt $x \in G$ in der linken Seite genau dann, wenn ${}^x\alpha(U) = \alpha(U)$, d.h. genau dann, wenn $\alpha({}^{\alpha^{-1}(x)}U) = \alpha(U)$, d.h. genau dann, wenn ${}^{\alpha^{-1}(x)}U = U$, d.h. genau dann, wenn $\alpha^{-1}(x) \in \mathrm{N}_G(U)$, d.h. genau dann, wenn $x \in \alpha(\mathrm{N}_G(U))$, d.h. genau dann, wenn es in der rechten Seite liegt.