

Lösung 11

Aufgabe 45.

- (1) Zur Bestimmung von T mit SAT diagonal setzen wir die Einheitsmatrix unter A und führen Spaltentransformationen für die zusammengesetzte Matrix aus. Sobald A Elementarteilerform hat, wurde sowohl die Matrix A als auch E von rechts mit T multipliziert. In anderen Worten, der untere Teil der erhaltenen Matrix enthält gerade das gesuchte T .

Wir rechnen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $SATx = 0$ genau dann, wenn $A(Tx) = 0$. Der Kern von A wird also von Vektoren der Form Te_i erzeugt, mit $i \in [3, 4]$, entsprechend der Positionen der Nullspalten in der Elementarteilerform SAT . Also ist $k = 2$, und wir können

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen.

- (2) Wir rechnen wie in (1).

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 1+i & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2-2i & 1-i & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & -2-2i & -2-2i & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 0 & -2+2i & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-i & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2+2i & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2i & -2-2i & -1-i & -2 \\ 0 & 0 & -i & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 2i & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $k = 3$, und wir können

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2-2i & -1-i & -2 \\ 1+i & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 1+i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wählen.

Aufgabe 46.

- (1) Nach dem Homomorphiesatz genügt es zu zeigen, daß der Kern der surjektiven Komposition

$$(G \longrightarrow \text{Cokern}(u)) := \left(G \xrightarrow{q} Y \longrightarrow Y/u(X) = \text{Cokern}(u) \right)$$

gleich $\text{Bild}((\hat{u} q')) = \hat{u}(F) + q'(G')$ ist. Ein Element $g \in G$ kommt unter dieser Komposition genau dann auf 0, wenn $q(g) \in u(X) = u(p(F)) = q(\hat{u}(F))$, i.e. wenn $q(g) = q(\hat{u}(f))$ ist für ein $f \in F$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $g - \hat{u}(f) \in \text{Kern } q = q'(G')$ liegt für ein $f \in F$, i.e. genau dann, wenn $g \in \hat{u}(F) + q'(G')$.

Somit haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \text{Cokern}((\hat{u} q')) & \xrightarrow{\sim} & \text{Cokern}(u) \\ g + (\hat{u}(F) + q'(G')) & \longmapsto & q(g) + u(X) . \end{array}$$

- (2) Zunächst ist $p'(F') = \text{Kern}(p) \subseteq \text{Kern}(u \circ p)$, da aus $p(f) = 0$ folgt, daß $(u \circ p)(f) = u(0) = 0$ für $f \in F$. Auch liegen alle angegebenen Moduln in F .

Zu zeigen bleibt, daß $\text{Kern}(u \circ p) = \pi_F(\text{Kern}(\hat{u} q'))$. Es ist $f \in F$ genau dann in $\text{Kern}(u \circ p) = \text{Kern}(q \circ \hat{u})$, wenn $q(\hat{u}(f)) = 0$, i.e. wenn $\hat{u}(f) \in \text{Kern}(q) = q'(G')$. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $g' \in G'$ gibt mit $\hat{u}(f) = q'(g')$, was wiederum genau dann eintritt, wenn f die Projektion auf F eines Elements $\begin{pmatrix} f \\ -g' \end{pmatrix} \in F \oplus G'$ ist, welches im Kern von $(\hat{u} q')$ liegt.

- (3) Zum einen ist $\text{Bild}(u) = \text{Bild}(u \circ p) \simeq F / \text{Kern}(u \circ p)$.

Zum anderen haben wir einen Morphismus $\text{Kern}(u \circ p) \longrightarrow \text{Kern}(u)$, $f \longrightarrow p(f)$, da aus $(u \circ p)(f) = 0$ folgt, daß $p(f) \in \text{Kern}(u)$. Dieser ist surjektiv, da ein Element in $\text{Kern}(u)$ insbesondere in $X = p(F)$ liegt und sich daher als $p(f)$ für ein $f \in F$ schreiben läßt, und dieses f dann in der Tat in $\text{Kern}(u \circ p)$ liegt. Wir müssen nach Homomorphiesatz zeigen, daß sein Kern gleich $p'(F')$ ist. Nun ist aber $p'(F') = \text{Kern}(p) \subseteq \text{Kern}(u \circ p)$, so daß ein Element von $\text{Kern}(u \circ p)$ genau dann unter p verschwindet, wenn es in $p'(F')$ liegt.

- (4) Wir begeben uns in folgende Situation.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Z}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}} & \mathbf{Z}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbf{Z}/(4) \oplus \mathbf{Z}/(8) \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Z}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}} & \mathbf{Z}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \mathbf{Z}/(2) \oplus \mathbf{Z}/(16) \end{array}$$

(vgl. das Diagramm aus der Aufgabenstellung).

Der **Cokern** von u berechnet sich gemäß (1) als der Cokern von $(\hat{u} q')$, i.e. als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^4}_{= F \oplus G'} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 16 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= G}.$$

Nach Aufgabe 45 (1) erhalten wir als Elementarteilerform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und damit

$$\text{Cokern}(u) \simeq \mathbf{Z}/(2).$$

Für den Kern und das Bild von u sollten wir gemäß (2) zunächst $\pi_F(\text{Kern}(\hat{u} q'))$ berechnen. Hierzu berechnen wir den Kern der eben angeführten Matrix wie in Aufgabe 45 (1), und aus der dort erhaltenen Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die in den Spalten Erzeuger dieses Kerns stehen hat, greift die Projektion $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ auf F die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ heraus, deren Spalten nun wiederum Erzeuger von $\pi_F(\text{Kern}(\hat{u} q')) = \text{Kern}(u \circ p)$ als Teilmodul von F sind. Da $p'(F') \subseteq \text{Kern}(u \circ p)$, gibt es nun eine Matrix $C \in \mathbf{Z}^{2 \times 2}$ mit $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} C$, und in der Tat liefert eine über $\mathbf{Q}$ durchgeführte Matrixinversion, daß $C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. (Diese Matrix muß aus theoretischen Gründen Einträge in $R = \mathbf{Z}$ haben; resultiert dies nicht aus der Rechnung, so enthält diese einen Fehler!) Somit erhalten wir die in (2) hergeleiteten Einbettungen

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= p'(F')} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \text{Kern}(u \circ p)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= F}.$$

Das **Bild** von u berechnet sich gemäß (3) als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \text{Kern}(u \circ p)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= F}.$$

Die Elementarteilerform von $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\text{Bild}(u) \simeq \mathbf{Z}/(2) \oplus \mathbf{Z}/(8).$$

Der **Kern** von u berechnet sich gemäß (3) als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= p'(F')} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \text{Kern}(u \circ p)}.$$

Die Elementarteilerform von $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Also ist

$$\text{Kern}(u) \simeq \mathbf{Z}/(2).$$

Probe. Zur Probe kann man bei als Mengen endlichen Moduln X und Y verifizieren, daß

$$|X| = |\text{Kern}(u)| \cdot |\text{Bild}(u)|$$

und daß

$$|Y| = |\text{Bild}(u)| \cdot |\text{Cokern}(u)|$$

Beides trifft hier zu, ersteres wegen $2^5 = 2^1 \cdot 2^4$, zweiteres wegen $2^5 = 2^4 \cdot 2^1$.

(5) Wir begeben uns in folgende Situation.

$$\begin{array}{ccccc} R^3 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} & R^3 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & R/(2) \oplus R/(1+i) \oplus R/(4) \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 \\ 2i & 0 & 1+i \\ 2 & 2-2i & 1-i \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 \\ 2i & 0 & 1+i \\ 2 & 2-2i & 1-i \end{pmatrix} \\ R^3 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} & R^3 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & R/(2) \oplus R/(2) \oplus R/(4) \end{array}$$

(vgl. das Diagramm aus der Aufgabenstellung).

Der Cokern von u berechnet sich gemäß (1) als der Cokern von

$$\underbrace{R^6}_{= F \oplus G'} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 1+i & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2-2i & 1-i & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}} \underbrace{R^3}_{= G}.$$

Nach Aufgabe 45 (2) erhalten wir als Elementarteilerform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und damit

$$\text{Cokern}(u) \simeq R/(2) \oplus R/(2+2i) = \mathbf{Z}[i]/(2) \oplus \mathbf{Z}[i]/(2+2i).$$

Unter Zuhilfenahme von Aufgabe 45 (2) erhalten wir die Einbettung $\text{Kern}(u \circ p) \longrightarrow F$ beschrieben von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2-2i & -1-i & -2 \end{pmatrix}$. Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2-2i & -1-i & -2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ liefert $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1+i \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$, welche die Einbettung $p'(F') \longrightarrow \text{Kern}(u \circ p)$ beschreibt.

So erhalten wir Einbettungen wie in (2)

$$\underbrace{R^3}_{= p'(F')} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1+i \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}} \underbrace{R^3}_{= \text{Kern}(u \circ p)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2-2i & -1-i & -2 \end{pmatrix}} \underbrace{R^3}_{= F}.$$

Die Elementarteilerform von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2-2i & -1-i & -2 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i \end{pmatrix}$. Also ist

$$\text{Bild}(u) \simeq R/(2+2i) = \mathbf{Z}[i]/(2+2i).$$

Die Elementarteilerform von $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1+i \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i \end{pmatrix}$. Also ist

$$\text{Kern}(u) \simeq R/(1+i) \oplus R/(2+2i) = \mathbf{Z}[i]/(1+i) \oplus \mathbf{Z}[i]/(2+2i).$$

Probe. Zur Probe kann man bei als Menge endlichen Moduln X und Y verifizieren, daß

$$|X| = |\text{Kern}(u)| \cdot |\text{Bild}(u)|$$

und daß

$$|Y| = |\text{Bild}(u)| \cdot |\text{Cokern}(u)|$$

Beides trifft hier zu, ersteres wegen $2^7 = 2^4 \cdot 2^3$, zweiteres wegen $2^8 = 2^3 \cdot 2^5$.

Aufgabe 47.

- (1) Sei R noethersch, und sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es zu jedem Tupel $[a_1, \dots, a_k]$ von Elementen von $\mathfrak{a}$ ein weiteres Element a_{k+1} derart, daß $a_{k+1} \notin (a_1, \dots, a_k) =: \mathfrak{a}_k$, da andernfalls $\mathfrak{a}$ von den Elementen $a_1, \dots, a_k$ erzeugt wäre. Wir erhalten so eine unendliche echt aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}_3 \subsetneq \dots$ von Idealen in R , was es in einem noetherschen Ring nicht geben kann, und wir sind bei einem Widerspruch angelangt.

Sei umgekehrt jedes Ideal von R endlich erzeugt. Wir haben zu zeigen, daß R noethersch ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es eine unendliche echt aufsteigende Kette $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}_3 \subsetneq \dots$ von Idealen in R . Sei $\mathfrak{a} = \bigcup_{k \geq 1} \mathfrak{a}_k$. Es ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R , da $0 \in \mathfrak{a}$, und da für $a, b \in \mathfrak{a}$ und $r, s \in R$ gilt, daß es ein $k \geq 1$ mit $a, b \in \mathfrak{a}_k$ gibt, und folglich $ra + sb \in \mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{a}$ liegt. Insbesondere ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, sagen wir, $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$. Sei $k \geq 0$ mit $a_i \in \mathfrak{a}_k$ für alle $i \in [1, n]$. Dann ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_k \subseteq \mathfrak{a}_l \subseteq \mathfrak{a}$ für $l \geq k$, also $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_l$, und wir sind bei einem Widerspruch angelangt.

- (2) Sei $F \xrightarrow{p} X$ surjektiver Morphismus von R -Moduln, mit F endlich erzeugt frei. Dann ist auch $p^{-1}(Y) \xrightarrow{p|_{p^{-1}(Y)}} Y$ ein surjektiver Morphismus von R -Moduln. Können wir zeigen, daß jeder Teilmodul von F endlich erzeugt ist, so auch $p^{-1}(Y)$ und also auch Y .

Wir dürfen also o.E. $X = R^n$ annehmen. Sei weiterhin $Y \subseteq X$ ein Teilmodul, von dem wir zeigen wollen, daß er endlich erzeugt ist. Wir führen dazu eine Induktion über n . Für $n = 1$ folgt die Aussage mit (1). Sei $n \geq 2$. Schreibe $R^n = R^{n-1} \oplus R$ und $R^{n-1} \oplus R \xrightarrow{\pi} R$ für die Projektion auf den zweiten Summanden. Es ist $Y \cap R^{n-1} \subseteq R^{n-1}$ nach Induktionsvoraussetzung endlich erzeugt. Sei etwa $Y \cap R^{n-1} = \langle y_1, \dots, y_k \rangle_R$. Ferner ist $\pi(Y) \subseteq R$ mit (1) endlich erzeugt. Sei etwa $\pi(Y) = \langle \pi(y_{k+1}), \dots, \pi(y_l) \rangle_R$.

Wir behaupten, daß $Y = \langle y_1, \dots, y_l \rangle_R$. Sei $y \in Y$. Es ist $\pi(y) = \sum_{i \in [k+1, l]} r_i \pi(y_i) = \pi\left(\sum_{i \in [k+1, l]} r_i y_i\right)$ für gewisse $r_i \in R$, wobei $i \in [k+1, l]$. Also ist $\pi\left(y - \sum_{i \in [k+1, l]} r_i y_i\right) = 0$, d.h. $y - \sum_{i \in [k+1, l]} r_i y_i \in R^{n-1} \cap Y$. Somit können wir $y - \sum_{i \in [k+1, l]} r_i y_i = \sum_{i \in [1, k]} r_i y_i$ schreiben für gewisse $r_i \in R$, wobei $i \in [1, k]$. Insgesamt ist $y = \sum_{i \in [1, l]} r_i y_i$, wie gesucht.

- (3) Sei mit (1) angenommen, es gebe ein nicht endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R[X]$.

Wähle $f_1(X)$ von minimalem Grad n_1 in $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$, und sei a_1 sein Leitkoeffizient.

Wähle $f_2(X)$ von minimalem Grad n_2 in $\mathfrak{a} \setminus (f_1(X))$, und sei a_2 sein Leitkoeffizient.

Wähle $f_3(X)$ von minimalem Grad n_3 in $\mathfrak{a} \setminus (f_1(X), f_2(X))$, und sei a_3 sein Leitkoeffizient. Usf.

Diese Polynome $f_i(X)$ existieren wie angegeben, da ansonsten $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt wäre.

Nach Konstruktion ist $n_i \leq n_{i+1}$ stets.

Nun ist $(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq \dots$ wegen R noethersch keine echt aufsteigende unendliche Kette von Idealen von R . In anderen Worten, es gibt ein $k \geq 1$ mit $a_{k+1} \in (a_1, \dots, a_k)$, sagen wir, $a_{k+1} = \sum_{i \in [1, k]} r_i a_i$. Dann ist aber

$$f_{k+1}(X) - \sum_{i \in [1, k]} X^{n_{k+1} - n_i} r_i f_i(X)$$

zwar in $\mathfrak{a}$, aber nicht in $(f_1(X), \dots, f_k(X))$, da ansonsten $f_{k+1}(X)$ ebenfalls darin enthalten wäre, und von kleinerem Grad als $f_{k+1}(X)$. Das geht nach Konstruktion $f_{k+1}(X)$ nicht.

Aufgabe 48.

- (1) Die Aussage ist wahr. Mit 47 (1) ist zu zeigen, daß jedes Ideal endlich erzeugt ist. Nach Voraussetzung ist aber sogar jedes Ideal von einem einzigen Element erzeugt.
- (2) Die Aussage ist wahr. Es ist $\mathbf{Q}$ noethersch, also mit Hilberts Basissatz (s. 47 (3)) auch $\mathbf{Q}[X]$. (Dies folgt auch mit 48 (1).) Abermals mit Hilberts Basissatz ist daher auch $\mathbf{Q}[X, Y] \simeq \mathbf{Q}[X][Y]$ noethersch.
- (3) Die Aussage ist falsch.

Sei z.B. $R = \langle X^i Y^j \mid (i, j) \in (\mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}) \cup \{(0, 0)\} \rangle_{\mathbf{Q}}$. Es ist R ein Teilring von $\mathbf{Q}[X, Y]$, da $1 = X^0 Y^0 \in R$, da R nach Konstruktion eine abelsche Untergruppe von $(\mathbf{Q}[X, Y], +)$ darstellt, und da $(i + i', j + j') \in (\mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}) \cup \{(0, 0)\}$ für alle $(i, j), (i', j') \in (\mathbf{Z}_{\geq 1} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}) \cup \{(0, 0)\}$.

Wir behaupten, daß R nicht noethersch ist. Sei $a_j := XY^j$ für $j \geq 0$. Sei $\mathfrak{a}_k := (a_0, a_1, \dots, a_k)$ für $k \geq 1$. Wir wollen zeigen, daß $\mathfrak{a}_k \subsetneq \mathfrak{a}_{k+1}$ stets. Sei $\mathfrak{b} := \langle X^i Y^j \mid (i, j) \in \mathbf{Z}_{\geq 2} \times \mathbf{Z}_{\geq 0} \rangle \subseteq R$. Da $X^0 Y^0$ das einzige Monom in R mit Grad 0 in X ist, hat $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{b}$ die $\mathbf{Q}$ -lineare Basis $(XY^i + \mathfrak{b} \mid i \in [0, k])$, so daß insbesondere $\dim_{\mathbf{Q}} \mathfrak{a}_k/\mathfrak{b} = k + 1$. Es folgt $\mathfrak{a}_k \neq \mathfrak{a}_{k+1}$.