**Beispiel.**

Sei $R = \mathbf{Z}$. Wir wollen Kern, Bild und Cokern von $(X \xrightarrow{u} Y) = \left(\mathbf{Z}/(3) \oplus \mathbf{Z}/(27) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/(9) \oplus \mathbf{Z}/(9)\right)$ berechnen.

Wir begeben uns in folgende Situation.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 27 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^2 \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] & & \mathbf{Z}/(3) \oplus \mathbf{Z}/(27) \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)"] \\
\mathbf{Z}^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)"] & \mathbf{Z}^2 \arrow[rr, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"] & & \mathbf{Z}/(9) \oplus \mathbf{Z}/(9)
\end{tikzcd}$$

(vgl. das Diagramm aus Aufgabe 46, dessen Bezeichnungen wir verwenden werden).

Der Cokern von $u$ berechnet sich gemäß 46 (1) als der Cokern von $(\hat{u}\ q')$, i.e. als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^4}_{= F \oplus G'} \xrightarrow{\overbrace{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 9 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)}^{=:A}} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= G} .$$

Zur Bestimmung von $T$ mit $SAT$ diagonal setzen wir die Einheitsmatrix unter $A$ und führen Spaltentransformationen für die zusammengesetzte Matrix aus. Der untere Teil der entstehenden Matrix enthält gerade das gesuchte $T$.

Wir rechnen.

$$\left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 9 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

Die Spalten unterhalb der Nullspalten der resultierenden Elementarteilerform, d.h. die Spalten 3 und 4, bilden den Kern von $A$ in Matrixform. Dessen Projektion auf $F$ ist also, in Matrixform, durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -9 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben (i.e. die Spalten $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -9 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugen diesen Kern als Teilmodul von $F = \mathbf{Z}^2$). Dazu gleich.

Zunächst ergibt sich der **Cokern** zu

$$\mathrm{Cokern}(u) \;\simeq\; \mathrm{Cokern}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \;\simeq\; \mathbf{Z}/(9) .$$

Für den Kern und das Bild benötigen nun wir die in 46 (2) hergeleiteten Einbettungen

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= p'(F')} \xrightarrow{C} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \mathrm{Kern}(u \circ p)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -9 \end{smallmatrix}\right)} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= F} ,$$

mit der Komposition $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -9 \end{smallmatrix}\right) C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 27 \end{smallmatrix}\right)$. Eine Rechnung in $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ gibt $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$. (Sollte die Rechnung hier ein nicht ganzzahliges $C$ ergeben, so enthält sie einen Fehler!)

Das **Bild** von $u$ berechnet sich nun gemäß 46 (3) als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \mathrm{Kern}(u \circ p)} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -9 \end{smallmatrix}\right)} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= F} .$$

über die Elementarteilerform zu

$$\mathrm{Bild}(u) \;\simeq\; \mathbf{Z}/(9) .$$

Der **Kern** von $u$ berechnet sich gemäß 46 (3) als der Cokern von

$$\underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= p'(F')} \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)} \underbrace{\mathbf{Z}^2}_{= \mathrm{Kern}(u \circ p)} .$$

über die Elementarteilerform zu

$$\operatorname{Kern}(u) \;\simeq\; \mathbf{Z}/(9)\;.$$

**Probe.** Zur Probe kann man bei als Mengen endlichen Moduln $X$ und $Y$ verifizieren, daß

$$|X| \;=\; |\operatorname{Kern}(u)|\cdot|\operatorname{Bild}(u)|$$

und daß

$$|Y| \;=\; |\operatorname{Bild}(u)|\cdot|\operatorname{Cokern}(u)|$$

Beides trifft hier zu, ersteres wegen $3^4 = 3^2\cdot 3^2$, zweiteres wegen $3^4 = 3^2\cdot 3^2$.