G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 16.12.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 9

Aufgabe 36 (3 Punkte).

Sei R ein Integritätsbereich, sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und sei $R \xrightarrow{f} T$ ein Ringmorphismus in einen kommutativen Ring T mit $f(S) \subseteq T^*$. Betrachte R als Teilring von R_S, d.h. identifiziere x mit $\frac{x}{1}$ für $x \in R$. Zeige, daß es genau einen Ringmorphismus $R_S \xrightarrow{\hat{f}} T$ gibt mit $\hat{f}|_R = f$.

Aufgabe 37 (6 Punkte).

(1) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, daß $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ genau dann eine multiplikative Teilmenge von R ist, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R ist. Wir schreiben die Lokalisierung daran auch kurz $R_\mathfrak{p} := R_{R\smallsetminus\mathfrak{p}}$.

(2) Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R sei $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} := \{\frac{a}{s} \in \mathrm{Quot}(R) \mid a \in \mathfrak{p},\ s \in R \smallsetminus \mathfrak{p}\}$. Zeige, daß $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ ein Ideal von $R_\mathfrak{p}$ ist, und daß

$$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p} \;\simeq\; \mathrm{Quot}(R/\mathfrak{p})\ .$$

(3) Zeige, daß $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal von $R_\mathfrak{p}$ ist.

Aufgabe 38 (6+3 Punkte).

Sei p prim. Betrachte den Ring $\mathbf{Z}_{(p)}$ (Schreibweise vgl. 37 (1)). Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}_{(p)} \smallsetminus \{0\} & \xrightarrow{\mathrm{v}_p} & \mathbf{Z}_{\geq 0} \\ x & \longmapsto & \max\{n \geq 0 \mid x \in (p^n) \subseteq \mathbf{Z}_{(p)}\} \end{array}$$

heiße *Bewertung bei* p (engl. valuation).

(1) Zeige folgende Eigenschaften.

  (i) Es ist $\mathrm{v}_p(xy) = \mathrm{v}_p(x) + \mathrm{v}_p(y)$ für alle $x,\ y \in \mathbf{Z}_{(p)} \smallsetminus \{0\}$.

  (ii) Es ist $\mathrm{v}_p(x+y) \geq \min(\mathrm{v}_p(x), \mathrm{v}_p(y))$ für alle $x,\ y \in \mathbf{Z}_{(p)} \smallsetminus \{0\}$, mit Gleichheit, falls $\mathrm{v}_p(x) \neq \mathrm{v}_p(y)$.

  (iii) Es sind x und y aus $\mathbf{Z}_{(p)} \smallsetminus \{0\}$ genau dann assoziiert, wenn $\mathrm{v}_p(x) = \mathrm{v}_p(y)$.

(2) Zeige, daß jedes Ideal ungleich 0 von $\mathbf{Z}_{(p)}$ von der Form (p^n) ist für ein $n \geq 0$.

Aufgabe 39 (4 Punkte). Seien R und S kommutative Ringe, und sei $R \xrightarrow{f} S$ ein Morphismus von Ringen. Zeige oder widerlege.

(1) Sei $\mathfrak{p} \subseteq S$ ein Primideal. Es ist $f^{-1}(\mathfrak{p}) \subseteq R$ Primideal.

(2) Sei $\mathfrak{m} \subseteq S$ ein maximales Ideal. Es ist $f^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq R$ maximal.

(3) Sei p prim, und sei R eine kommutative $\mathbf{F}_p$-Algebra. Sei $R \xrightarrow{\mathrm{F}} R$, $x \longmapsto \mathrm{F}(x) := x^p$. Es ist F ein Morphismus von Ringen (F wie Frobenius).

(4) Seien R und F wie in (3), und R dazuhin ein Körper. Es ist F ein Automorphismus von Ringen.