G. Nebe, M. Künzer   Abgabe am 09.12.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 8

Aufgabe 31 (8 Punkte).

(1) Seien a, b, c, $d \in \mathbf{Z}$. Bestimme alle $x \in \mathbf{Z}$ mit $x \equiv_2 a$, $x \equiv_3 b$, $x \equiv_7 c$ und $x \equiv_{11} d$.

(2) Seien a, b, $c \in \mathbf{Z}$. Bestimme alle $x \in \mathbf{Z}$ mit $x \equiv_4 a$, $x \equiv_7 b$ und $x \equiv_6 c$.
(Hinweis: Zerlege die Kongruenz $x \equiv_6 c$ gemäß Chinesischem Restsatz. Spezifiziere dann eine notwendige Bedingung an (a, b, c) für die Existenz von x. Falls (a, b, c) dieser Bedingung genügt, wende den Chinesischen Restsatz an.)

Aufgabe 32 (9 Punkte).

(1) Sei K ein Körper, sei $f(X) \in K[X]$ ein Polynom von Grad $n \geq 0$. Zeige, daß $(\bar{X}^0, \bar{X}^1, \ldots, \bar{X}^{n-1})$ eine Basis von $K[X]/(f(X))$ als Vektorraum über K ist.

(2) Sei $R := \mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$.
Gib alle Elemente von R an. Bestimme alle Ringautomorphismen von R. Ist R ein Körper?

(3) Bestimme alle Ringmorphismen von $S := \mathbf{F}_3[X]/(X^4 - 1)$ nach $T := \mathbf{F}_3[X]/(X^2 + 1)$.
Welche davon sind surjektiv? Welche injektiv? Ist S ein Körper? Ist T ein Körper?

Aufgabe 33 (6 Punkte).
Sei $R = \mathbf{Z}[X]/(X^4 - 5)$.

(1) Gibt es in $R/(2)$ ein nilpotentes Element ungleich Null?

(2) Gibt es in $R/(11)$ ein nilpotentes Element ungleich Null?

Aufgabe 34 (3 Punkte).

(1) Zeige, daß $\mathbf{R}[X]/(X^2 - 3) \longrightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $a\bar{X} + b \longmapsto (a\sqrt{3} + b, -a\sqrt{3} + b)$ ein Isomorphismus ist, wobei a, $b \in \mathbf{R}$. Schreibe $\pi_1(a\bar{X} + b) := a\sqrt{3} + b$ (Projektion auf ersten Faktor).

(2) Zeige, daß $(-2b)^{-1}(\bar{X} - b)^2 = \bar{X} - \frac{b^2+3}{2b}$ in $\mathbf{R}[X]/(X^2 - 3)$, wobei $b \in \mathbf{R} \smallsetminus \{0\}$.

(3) Definiere eine Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen durch $x_1 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{x_n^2+3}{2x_n}$ für $n \geq 1$. Zeige, daß $|\sqrt{3} - x_{n+1}| = |\pi_1(\bar{X} - x_{n+1})| = |\pi_1((\bar{X} - x_n)^2)||2x_n|^{-1} = |\pi_1(\bar{X} - x_n)|^2|2x_n|^{-1} = |\sqrt{3} - x_n|^2|2x_n|^{-1}$.
Folgere, daß $x_n \to \sqrt{3}$ für $n \to \infty$. Gib x_n an für $n \in [1, 4]$.

Aufgabe 35 (4 Punkte).
Sei K ein Körper und sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring. Zeige oder widerlege.

(1) Ist $f(X) \in K[X]$ irreduzibel, so ist $K[X]/(f(X))$ ein Körper.

(2) Ist R ein Integritätsbereich, welcher endlich viele Ideale enthält, so ist R ein Körper.

(3) Jeder Ringmorphismus $K \longrightarrow R$ ist injektiv.

(4) Ist R eine K-Algebra, endlichdimensional als Vektorraum über K, und ist R dazuhin ein Integritätsbereich, so ist R ein Körper.