G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 02.12.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 7

Aufgabe 27 (9 Punkte).

Seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$.

(1) Zeige, daß Gruppen der Ordnung pq auflösbar sind.

(2) Zeige, daß Gruppen der Ordnung p^2q auflösbar sind.

(3) Zeige, daß Gruppen der Ordnung p^2q^2 auflösbar sind.

(Hinweis: Konstruiere Normalteiler mit Sylow.)

Aufgabe 28 (12+3 Punkte).

(1) Zeige, daß eine einfache nichtabelsche Gruppe von Ordnung ≤ 80 isomorph zu $\mathcal{A}_5$ ist. (Hinweis: Verwende 18 (8). Das Argument für 18 (3) kann darüber hinaus von Nutzen sein. Verwende auch Aufgabe 27, um Fälle auszuschließen.)

(2) Zeige, daß eine Gruppe von Ordnung ≤ 80 auflösbar oder isomorph zu $\mathcal{A}_5$ ist. (Hinweis: Gegenbeispiel minimaler Ordnung mit (1) zu Widerspruch führen.)

Aufgabe 29 (8 Punkte).

Sei $p \geq 3$ prim, und sei G eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung p^3.

(1) Zeige, daß $\mathrm{Z}(G) \simeq C_p$. Bestimme die Kommutatorreihe von G. (Hinweis: Betrachte $G/\mathrm{Z}(G)$.)

(2) Falls alle Elemente in $G \smallsetminus \{1\}$ Ordnung p haben, so zeige unter Verwendung von (1), daß G einen Normalteiler isomorph zu $C_p \times C_p$ hat, welcher ein Komplement in G besitzt.

(3) Falls ein Element b in G die Ordnung p^2 besitzt, so zeige, daß $\langle b \rangle$ ein Komplement in G hat. (Hinweis: Nehme an, es habe $\langle b \rangle$ kein Komplement, und nehme ein Element c in $G \smallsetminus \langle b \rangle$, notwendig von Ordnung p^2, so daß wir $b^p = c^p$ annehmen können. Es ist $b^p \in \mathrm{Z}(G)$, da G von b und c erzeugt wird. Es ist $c^{-1}bc = b^k$ für ein $k \in \mathbf{Z}$. Da $[b,c] \in \mathrm{Z}(G)$ mit (1), folgt $k \equiv_p 1$. Zeige, daß $|\langle bc^{-1} \rangle| = p$. Das Komplement $\langle bc^{-1} \rangle$ gibt den Widerspruch.)

(4) Zeige, daß G zu $\langle z, x, y \,|\, z^p, x^p, [z,x], {}^{y}z \cdot z^{-1}, {}^{y}x \cdot (xz)^{-1} \rangle$ ($\simeq (C_p \times C_p) \rtimes C_p$) oder zu $\langle b, x \,|\, b^{p^2}, x^p, {}^{x}b \cdot b^{-(1+p)} \rangle$ ($\simeq C_{p^2} \rtimes C_p$) isomorph ist.

Aufgabe 30 (2 Punkte). Zeige oder widerlege.

(1) Sind G und H zwei Gruppen derart, daß eine Bijektion von Mengen $G \xrightarrow{\varphi} H$ existiert mit $|\langle \varphi(g) \rangle| = |\langle g \rangle|$ für alle $g \in G$ (i.e. φ ordnungserhaltend), dann sind G und H isomorph. (Hinweis: Vergleiche eine Gruppe in Aufgabe 29 mit einer abelschen Gruppe.)

(2) Besitzt eine Gruppe G eine endliche Präsentation mit weniger Relatoren als Erzeugern, so ist G unendlich.