Blatt 7**Aufgabe 27 (9 Punkte).**

Seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$.

- (1) Zeige, daß Gruppen der Ordnung pq auflösbar sind.
- (2) Zeige, daß Gruppen der Ordnung p^2q auflösbar sind.
- (3) Zeige, daß Gruppen der Ordnung p^2q^2 auflösbar sind.

(Hinweis: Konstruiere Normalteiler mit Sylow.)

Aufgabe 28 (12+3 Punkte).

- (1) Zeige, daß eine einfache nichtabelsche Gruppe von Ordnung ≤ 80 isomorph zu $\mathcal{A}_5$ ist. (Hinweis: Verwende 18 (8). Das Argument für 18 (3) kann darüber hinaus von Nutzen sein. Verwende auch Aufgabe 27, um Fälle auszuschließen.)
- (2) Zeige, daß eine Gruppe von Ordnung ≤ 80 auflösbar oder isomorph zu $\mathcal{A}_5$ ist. (Hinweis: Gegenbeispiel minimaler Ordnung mit (1) zu Widerspruch führen.)

Aufgabe 29 (8 Punkte).

Sei $p \geq 3$ prim, und sei G eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung p^3 .

- (1) Zeige, daß $Z(G) \simeq C_p$. Bestimme die Kommutatorreihe von G . (Hinweis: Betrachte $G/Z(G)$.)
- (2) Falls alle Elemente in $G \setminus \{1\}$ Ordnung p haben, so zeige unter Verwendung von (1), daß G einen Normalteiler isomorph zu $C_p \times C_p$ hat, welcher ein Komplement in G besitzt.
- (3) Falls ein Element b in G die Ordnung p^2 besitzt, so zeige, daß $\langle b \rangle$ ein Komplement in G hat. (Hinweis: Nehme an, es habe $\langle b \rangle$ kein Komplement, und nehme ein Element c in $G \setminus \langle b \rangle$, notwendig von Ordnung p^2 , so daß wir $b^p = c^p$ annehmen können. Es ist $b^p \in Z(G)$, da G von b und c erzeugt wird. Es ist $c^{-1}bc = b^k$ für ein $k \in \mathbf{Z}$. Da $[b, c] \in Z(G)$ mit (1), folgt $k \equiv_p 1$. Zeige, daß $|\langle bc^{-1} \rangle| = p$. Das Komplement $\langle bc^{-1} \rangle$ gibt den Widerspruch.)
- (4) Zeige, daß G zu $\langle z, x, y \mid z^p, x^p, [z, x], yz \cdot z^{-1}, yx \cdot (xz)^{-1} \rangle$ ($\simeq (C_p \times C_p) \rtimes C_p$) oder zu $\langle b, x \mid b^{p^2}, x^p, xb \cdot b^{-(1+p)} \rangle$ ($\simeq C_{p^2} \rtimes C_p$) isomorph ist.

Aufgabe 30 (2 Punkte). Zeige oder widerlege.

- (1) Sind G und H zwei Gruppen derart, daß eine Bijektion von Mengen $G \xrightarrow{\varphi} H$ existiert mit $|\langle \varphi(g) \rangle| = |\langle g \rangle|$ für alle $g \in G$ (i.e. φ ordnungserhaltend), dann sind G und H isomorph. (Hinweis: Vergleiche eine Gruppe in Aufgabe 29 mit einer abelschen Gruppe.)
- (2) Besitzt eine Gruppe G eine endliche Präsentation mit weniger Relatoren als Erzeugern, so ist G unendlich.