Algebra I, WS 04/05

Blatt 6

Aufgabe 25 (18 Punkte).

(a) Gib für die Erzeuger x, y der Gruppe G Relatoren $f_1(g,h), \ldots, f_s(g,h)$ an derart, daß wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G} \;:=\; \langle g,h \;:\; f_1(g,h),\ldots,f_s(g,h)\rangle & \xrightarrow{\sim} & G \\ g & \longmapsto & x \\ h & \longmapsto & y \end{array}$$

erhalten. (Hinweis: Sei $F := \langle g,h\rangle$ die freie Gruppe. Wende, falls erforderlich, den verfeinerten Bahnenalgorithmus auf die F-Menge G an, mit basis (1). Die Erzeuger des Stabilisators von 1 geben die Relatoren. Vereinfache die Relatorenmenge noch, falls möglich – die gefundenen Erzeuger erzeugen den Kern $\mathrm{Stab}_F(1)$ von $F \longrightarrow G$ sogar als Untergruppe !)

(b) Berechne unter Verwendung von (a) den Isomorphietyp der endlichen abelschen Gruppe G/G'.

(c) Berechne $|\operatorname{Aut} G|$. Gib den injektiven Gruppenmorphismus $\operatorname{Aut} G \hookrightarrow \mathcal{S}_n$ an, für geeignetes n, der sich aus der Operation von $\operatorname{Aut} G$ auf $(\operatorname{Aut} G)x \cup (\operatorname{Aut} G)y$ ergibt. (Hinweis: Zunächst folgt aus $\tilde{G} \simeq G$, daß $\operatorname{Aut} \tilde{G} \simeq \operatorname{Aut} G$, wir können also G durch eine isomorphe Kopie $\tilde{G}$ ersetzen. Ein Automorphismus einer durch Erzeuger und Relatoren gegebenen endlichen Gruppe ist durch die Bilder der Erzeuger gegeben, falls diese Bilder dieselben Relationen erfüllen und ebenfalls wieder die Gruppe erzeugen.)

Es sind (a), (b) und (c) in den folgenden Fällen zu bearbeiten.

(1) $G = D_8 = \langle \underbrace{(1,2)(3,4)}_{=:\,x},\ \underbrace{(1,3)}_{=:\,y}\rangle \leq \mathcal{S}_4$.

(2) $G = Q_8 = \langle \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{smallmatrix}\right)}_{=:\,x},\ \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)}_{=:\,y}\rangle \leq \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$. Standardbezeichnung: $I := g$, $J := h$.

(3) $G = \langle \underbrace{(1,2,3,4)}_{=:\,x},\ \underbrace{(5,6,7,8)}_{=:\,y}\rangle \leq \mathcal{S}_8$.

Aufgabe 26 (12 Punkte). Sei für $n \geq 2$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n \;:=\; \left\langle s_1,\ldots,s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_i^2 & \text{für } i \in [1,n-1] \\ [s_i,s_j] & \text{für } i,\, j \,\in\, [1,n-1] \text{ mit } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} s_i s_{i+1} & \text{für } i \in [1,n-2] \end{array} \right\rangle .$$

(1) Zeige, daß durch $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{S}}_n$, $s_i \longmapsto s_i$ für $i \in [1,n-2]$, ein Gruppenmorphismus definiert ist.

(2) Sei $U = \varphi(\tilde{\mathcal{S}}_{n-1})$, mit φ aus (1). Zeige, daß $\tilde{\mathcal{S}}_n = U \;\cup\; \bigcup_{t\in[1,n-1]} s_t s_{t+1}\cdots s_{n-1}U$. (Hinweis: Betrachte in einem Wort in den s_i den ersten Buchstaben s_{n-1} von *rechts,* falls vorhanden. Dessen Position sei die *Leitposition.* Betrachte nun unter allen Wörtern, die dasselbe Element darstellen, eines mit minimaler Leitposition. Dieses ist dann von der Form $s_t s_{t+1}\cdots s_{n-1}u$ mit $u \in U$.)

(3) Es ist $|\tilde{\mathcal{S}}_n| \leq n!$. (Hinweis: Mit (2) ist $|\tilde{\mathcal{S}}_n| \leq n\cdot|U| \leq n\cdot|\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}|$.)

(4) Zeige, daß durch $\tilde{\mathcal{S}}_n \longrightarrow \mathcal{S}_n$, $s_i \longmapsto (i,i+1)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus definiert ist. Folgere mit (3), daß ein Isomorphismus vorliegt.

(5) Zeige, daß es einen Automorphismus α von $\mathcal{S}_6$ mit $\alpha((1,2)) = (1,2)(3,4)(5,6)$ und $\alpha((1,2,3,4,5,6)) = (1,2,3)(4,5)$ gibt, der nicht in $\operatorname{Inn}\mathcal{S}_6$ liegt. (Hinweis: Berechne zuerst $\alpha((i,i+1))$ für $i \in [2,5]$ und wende dann (4) an.)

(6) Berechne mit (4) den Isomorphietyp der abelschen Gruppe $\mathcal{S}_5/\mathcal{S}_5'$.