Algebra I, WS 04/05

Blatt 5

Aufgabe 20 (9 Punkte). Sei G eine Gruppe. Bestimme alle möglichen Weisen, G nichttrivial als semidirektes Produkt zu schreiben. Dabei heißen $G \rtimes 1$ und $1 \rtimes G$ trivial. Betrachte hierzu alle Normalteiler von G. Falls ein Normalteiler kein Komplement hat, so begründe dies. Ansonsten gebe *ein* Komplement an.

(1) $G = \mathcal{S}_3$.

(2) $G = Q_8$.

(3) $G = \mathcal{S}_4$.

Aufgabe 21 (2+2+1 Punkte).

Sei K ein Körper mit $|K| = p^a$ Elementen, $a \geq 1$, p prim, und sei $n \geq 1$. Betrachten wir K^n als additive abelsche Gruppe, so haben wir den Inklusionsmorphismus $\mathrm{GL}_n(K) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(K^n)$, mittels welchem ein semidirektes Produkt $\mathrm{Aff}_n(K) := K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$ definiert ist, genannt die *affine Gruppe.*
Kurz: $\mathrm{Aff}_n(K)$ ist das semidirekte Produkt bezüglich der natürlichen Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf K^n.

(1) Bestimme die Ordnung $|K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)|$ und gib eine p-Sylowgruppe von $K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$ an.

(2) Berechne $\mathrm{Z}(K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K))$.

(3) Sei $n \geq 3$. Berechne $(K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K))'$.

Aufgabe 22 (3+2 Punkte). Sei p prim.

(1) Bestimme alle Gruppen von Ordnung p^2 bis auf Isomorphie.

(2) Bestimme alle Gruppen von Ordnung 12 bis auf Isomorphie.

Man vergesse den Nachweis nicht, daß die gefundenen Gruppen paarweise nichtisomorph sind.

Aufgabe 23 (6 Punkte). Sei $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in (\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})^{2\times 2} \;:\; \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \text{ invertierbar in } \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}\}$.
(In der Linearen Algebra wurde $\mathbf{Z}/16\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_{16}$ geschrieben.)

(1) Gib einen surjektiven Gruppenmorphismus von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})$ nach $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ an. Berechne seinen Kern N.

(2) Bestimme mit (1) die Ordnung von $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/16\mathbf{Z})$.

(3) Setze $N_{(0)} := N$ und $N_{(k+1)} := N_{(k)}/\mathrm{Z}(N_{(k)})$. Berechne $|N_{(k)}|$ für $k \geq 0$.

Aufgabe 24 (7 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Zeige oder widerlege.

(1) Ist $G/\mathrm{Z}(G)$ abelsch, so ist G abelsch.

(2) Ist $G \xrightarrow{f} H$ ein Morphismus von Gruppen, so ist $f(G') = f(G)'$.

(3) Ist $G \xrightarrow{f} H$ ein Morphismus von Gruppen, so ist $f(\mathrm{Z}(G)) = \mathrm{Z}(f(G))$.

(4) Es gibt eine einfache Gruppe von Ordnung 16.

(5) Sind alle Sylowuntergruppen von G normal, so ist G direktes Produkt ihrer Sylowuntergruppen.

(6) Seien $H, K \leq G$, und sei $HK/K := \{hK \;:\; h \in H\} \subseteq G/K$. Es gibt eine Bijektion von $H/(H \cap K)$ nach HK/K.

(7) Alle Komplemente eines Normalteilers in G sind konjugiert in G.