G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 11.11.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 4

Aufgabe 16 (9 Punkte).

(1) Sei G eine Gruppe von Ordnung 77. Zeige, daß $G \simeq C_{77}$.

(2) Sei G eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 14. Zeige, daß $G \simeq \langle (1,2,3,4,5,6,7), (1,6)(2,5)(3,4) \rangle \leq \mathcal{S}_7$.

(3) Sei G eine Gruppe von Ordnung 105. Zeige, daß G einen Normalteiler von Ordnung 35 enthält.

Aufgabe 17 (3+3+1+1 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Bestimme für jeden Primteiler p der Gruppenordnung $|G|$ je eine p-Sylowgruppe von G.

(1) $G = \mathcal{S}_4$.

(2) $G = \mathcal{S}_{10}$.

(3) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_{11})$.

(4) $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{F}_5)$.

Aufgabe 18 (8 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Sei H eine einfache Gruppe von Ordnung $|H| = 60$.

(1) Sei p ein Primteiler von $|G|$. Zeige, daß die Anzahl der p-Sylowgruppen genau dann gleich 1 ist, wenn es eine normale p-Sylowgruppe gibt.

(2) Ist $U \leq G$ mit Index $[G : U]$, so gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \leq U$ und $[G : N]$ einem Teiler von $[G : U]!$.

(3) Zeige: Es gibt keine transitive H-Menge M mit $|M| \in \{2, 3, 4\}$.

(4) Zeige: Gibt es eine transitive H-Menge M mit $|M| = 5$, dann ist $H \simeq \mathcal{A}_5$. (Hinweis: Warum ist der induzierte Morphismus $H \xrightarrow{f} \mathcal{S}_5$ injektiv? Betrachte dann Komposition mit Signum, um $f(H) = \mathcal{A}_5$ nachzuweisen.)

(5) Bestimme die Anzahl der 5-Sylowgruppen in H.

(6) Bestimme die Anzahl der 3-Sylowgruppen in H. (Hinweis: Verwende (3), um die mögliche Anzahl 4 auszuschließen.)

(7) Führe die Annahme, die Anzahl der 2-Sylowgruppen in H sei 15, zu einem Widerspruch. (Hinweis: Warum muß es dann ein Element $x \in H \setminus \{1\}$ geben, welches in zwei verschiedenen 2-Sylowgruppen liegt? Wieviele Elemente von Ordnung 2 oder 4 hätte man ansonsten? Wieso folgt daraus $|{}^{H}x| \in \{3, 5\}$?)

(8) Zeige, daß $H \simeq \mathcal{A}_5$.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Sei $n \geq 1$, und sei $N \trianglelefteq \mathcal{A}_n$ ein Normalteiler, für welchen sogar noch $N \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ gelte. Ein *Dreierzykel* in $\mathcal{S}_n$ ist ein Element der Form (a, b, c). (Hinweis: Bilde in (2), (3), (4) ein Element $\sigma^{-1}\,{}^{\tau}\sigma$ mit τ geeignet.)

(1) Falls N einen Dreierzykel enthält, so zeige, daß $N = \mathcal{A}_n$. (Hinweis: Zerlege $\sigma \in \mathcal{A}_n$ in ein Produkt von Transpositionen.)

(2) Enthalte N ein Element σ, welches in disjunkter Zykeldarstellung einen Zykel der Länge ≥ 3 aufweist. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.

(3) Enthalte N ein Element σ, welches in disjunkter Zykelschreibweise wenigstens 3 Zykel der Länge 2 aufweist. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.

(4) **Sei $n \geq 5$.** Enthalte N ein Element der Form $\sigma = (a, b)(c, d)$. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.

(5) Zeige, daß für $n \geq 5$ entweder $N = 1$ oder $N = \mathcal{A}_n$ gilt.

(6) Sei $n \geq 5$. Sei $M \trianglelefteq \mathcal{A}_n$. Zeige, daß $M \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ ist. (Hinweis: Wir können annehmen, daß M nichttrivial ist. Wäre nun $M \trianglelefteq \mathcal{A}_n$, aber $M \not\trianglelefteq \mathcal{S}_n$, warum wäre dann $M \cap {}^{(1,2)}M = 1$ und $M \cdot {}^{(1,2)}M = \mathcal{A}_n$? Betrachte dann $M \cap \mathrm{C}_{\mathcal{A}_n}((1,2))$.)

(7) Zeige, daß für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ einfach ist.

(8) Finde für $n = 4$ ein Gegenbeispiel für die Aussage in (4).