Blatt 4**Aufgabe 16 (9 Punkte).**

- (1) Sei G eine Gruppe von Ordnung 77. Zeige, daß $G \simeq C_{77}$.
- (2) Sei G eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 14. Zeige, daß $G \simeq \langle (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), (1, 6)(2, 5)(3, 4) \rangle \leq \mathcal{S}_7$.
- (3) Sei G eine Gruppe von Ordnung 105. Zeige, daß G einen Normalteiler von Ordnung 35 enthält.

Aufgabe 17 (3+3+1+1 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Bestimme für jeden Primteiler p der Gruppenordnung $|G|$ je eine p -Sylowgruppe von G .

- (1) $G = \mathcal{S}_4$.
- (2) $G = \mathcal{S}_{10}$.
- (3) $G = \text{GL}_2(\mathbf{F}_{11})$.
- (4) $G = \text{GL}_3(\mathbf{F}_5)$.

Aufgabe 18 (8 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe. Sei H eine einfache Gruppe von Ordnung $|H| = 60$.

- (1) Sei p ein Primteiler von $|G|$. Zeige, daß die Anzahl der p -Sylowgruppen genau dann gleich 1 ist, wenn es eine normale p -Sylowgruppe gibt.
- (2) Ist $U \leq G$ mit Index $[G : U]$, so gibt es einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \leq U$ und $[G : N]$ einem Teiler von $[G : U]!$.
- (3) Zeige: Es gibt keine transitive H -Menge M mit $|M| \in \{2, 3, 4\}$.
- (4) Zeige: Gibt es eine transitive H -Menge M mit $|M| = 5$, dann ist $H \simeq \mathcal{A}_5$. (Hinweis: Warum ist der induzierte Morphismus $H \xrightarrow{f} \mathcal{S}_5$ injektiv? Betrachte dann Komposition mit Signum, um $f(H) = \mathcal{A}_5$ nachzuweisen.)
- (5) Bestimme die Anzahl der 5-Sylowgruppen in H .
- (6) Bestimme die Anzahl der 3-Sylowgruppen in H . (Hinweis: Verwende (3), um die mögliche Anzahl 4 auszuschließen.)
- (7) Führe die Annahme, die Anzahl der 2-Sylowgruppen in H sei 15, zu einem Widerspruch. (Hinweis: Warum muß es dann ein Element $x \in H \setminus \{1\}$ geben, welches in zwei verschiedenen 2-Sylowgruppen liegt? Wieviele Elemente von Ordnung 2 oder 4 hätte man ansonsten? Wieso folgt daraus $|H_x| \in \{3, 5\}$?)
- (8) Zeige, daß $H \simeq \mathcal{A}_5$.

Aufgabe 19 (4 Punkte). Sei $n \geq 1$, und sei $N \trianglelefteq \mathcal{A}_n$ ein Normalteiler, für welchen sogar noch $N \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ gelte. Ein Dreierzykel in $\mathcal{S}_n$ ist ein Element der Form (a, b, c) . (Hinweis: Bilde in (2), (3), (4) ein Element $\sigma^{-1} \tau \sigma$ mit τ geeignet.)

- (1) Falls N einen Dreierzykel enthält, so zeige, daß $N = \mathcal{A}_n$. (Hinweis: Zerlege $\sigma \in \mathcal{A}_n$ in ein Produkt von Transpositionen.)
- (2) Enthalte N ein Element σ , welches in disjunkter Zykeldarstellung einen Zykel der Länge ≥ 3 aufweist. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.
- (3) Enthalte N ein Element σ , welches in disjunkter Zykelschreibweise wenigstens 3 Zykel der Länge 2 aufweist. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.
- (4) **Sei $n \geq 5$.** Enthalte N ein Element der Form $\sigma = (a, b)(c, d)$. Zeige, daß N einen Dreierzykel enthält.
- (5) Zeige, daß für $n \geq 5$ entweder $N = 1$ oder $N = \mathcal{A}_n$ gilt.
- (6) Sei $n \geq 5$. Sei $M \trianglelefteq \mathcal{A}_n$. Zeige, daß $M \trianglelefteq \mathcal{S}_n$ ist. (Hinweis: Wir können annehmen, daß M nichttrivial ist. Wäre nun $M \trianglelefteq \mathcal{A}_n$, aber $M \not\trianglelefteq \mathcal{S}_n$, warum wäre dann $M \cap {}^{(1,2)}M = 1$ und $M \cdot {}^{(1,2)}M = \mathcal{A}_n$? Betrachte dann $M \cap C_{\mathcal{A}_n}((1, 2))$.)
- (7) Zeige, daß für $n \geq 5$ die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$ einfach ist.
- (8) Finde für $n = 4$ ein Gegenbeispiel für die Aussage in (4).