G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 04.11.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 3

Aufgabe 13 ((3+1+2)+(3+1+2+2)+(2+2) Punkte).

(1) Sei $G = \langle (1,2,3), (3,4,5) \rangle \le \mathcal{S}_5$.

(a) Bestimme eine base und strong generators für G.

(b) Bestimme $|G|$.

(c) Ist $(1,3,5) \in G$? Falls ja, stelle es als Produkt in den angegebenen Erzeugern von G dar.

(2) Sei $G = \langle (1,2,3,4,5,6), (1,4) \rangle \le \mathcal{S}_6$.

(a) Bestimme eine base und strong generators für G.

(b) Bestimme $|G|$.

(c) Ist $(1,2) \in G$? Falls ja, stelle es als Produkt in den angegebenen Erzeugern von G dar.

(d) Berechne Erzeuger von $\mathrm{Z}(G)$, sowie $|\mathrm{Z}(G)|$.
(Hinweis: Bahnenalgorithmus für Konjugationsoperation von G auf G.)

(3) Sei $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \le \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$.

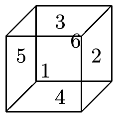
(a) Berechne $|G|$.

(b) Berechne Erzeuger von $\mathrm{Z}(G)$, sowie $|\mathrm{Z}(G)|$.

Aufgabe 14 (8 Punkte). Sei $m \ge 0$, sei A_m die Menge der Abbildungen von $[1,6]$ nach $[1,m]$, und sei $A'_m \subseteq A_m$ die Teilmenge der surjektiven Abbildungen.

(1) Wir interpretieren A_m als die Menge der Perlenfärbungen der 6 Perlen einer Kette mit m möglichen Farben. Auf A_m operiere dementsprechend $G := \langle (1,2,3,4,5,6), (1,6)(2,5)(3,4) \rangle \le \mathcal{S}_6$ via $\rho \cdot f := f \circ \rho^{-1}$, wobei $\rho \in G$ und $f \in A_m$. Zwei Perlenfärbungen f und f' sind bis auf Perlenkettenbewegung als gleich anzusehen, falls sie in derselben G-Bahn von A_m liegen. Bestimme die Anzahl dieser G-Bahnen.

(2) Wir interpretieren A'_m als die Menge der Seitenfärbungen eines Würfels mit m möglichen Farben, mit der Zusatzbedingung, daß jede mögliche Farbe wenigstens einmal auftreten soll. Auf A'_m operiert dementsprechend $H := \langle (1,2,6,5), (1,3,6,4) \rangle \le \mathcal{S}_6$ via $\rho \cdot f := f \circ \rho^{-1}$, wobei $\rho \in H$ und $f \in A'_m$. Zwei Würfelfärbungen f und f' sind bis auf Würfeldrehung als gleich anzusehen, falls sie in derselben H-Bahn von A'_m liegen. Bestimme die Anzahl dieser H-Bahnen.



Aufgabe 15 (5 Punkte). Seien G eine endliche Gruppe und M eine endliche G-Menge. Ist $x \in G$, so schreiben wir $\mathrm{Fix}_M(x) := \{m \in M \ : \ xm = m\}$ für die Menge der Fixpunkte von x. Wir schreiben $\mathrm{ConjCl}(G)$ für ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von G. Sei ferner $M \times M$ eine G-Menge via $g(m,n) := (gm, gn)$ für $g \in G$ und $(m,n) \in M \times M$. Zeige oder widerlege.

(1) Sind x, $g \in G$, so ist $|\,\mathrm{Fix}_M(x)| = |\,\mathrm{Fix}_M({}^{g}x)|$.

(2) Es ist $|G \backslash M| = \sum_{x \in \mathrm{ConjCl}(G)} \frac{|\,\mathrm{Fix}_M(x)|}{|\mathrm{C}_G(x)|}$.

(3) Es ist $\sum_{x \in G} |\{gU \in G/U \ : \ {}^{g^{-1}}x \in U\}| = |G|$.

(4) Ist M eine transitive G-Menge, so besteht $M \times M$ aus $|M|$ Bahnen unter G.

(5) Es besteht $M \times M$ aus $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\,\mathrm{Fix}_M(x)|^2$ Bahnen unter $|G|$.