G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 04.11.04.

Algebra I, WS 04/05

# Blatt 3

**Aufgabe 13 ((3+1+2)+(3+1+2+2)+(2+2) Punkte).**

(1) Sei $G = \langle (1,2,3), (3,4,5) \rangle \leq \mathcal{S}_5$.

- (a) Bestimme eine base und strong generators für $G$.
- (b) Bestimme $|G|$.
- (c) Ist $(1,3,5) \in G$ ? Falls ja, stelle es als Produkt in den angegebenen Erzeugern von $G$ dar.

(2) Sei $G = \langle (1,2,3,4,5,6), (1,4) \rangle \leq \mathcal{S}_6$.

- (a) Bestimme eine base und strong generators für $G$.
- (b) Bestimme $|G|$.
- (c) Ist $(1,2) \in G$ ? Falls ja, stelle es als Produkt in den angegebenen Erzeugern von $G$ dar.
- (d) Berechne Erzeuger von $\mathrm{Z}(G)$, sowie $|\mathrm{Z}(G)|$.
  (Hinweis: Bahnenalgorithmus für Konjugationsoperation von $G$ auf $G$.)

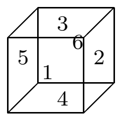
(3) Sei $G = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leq \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_5)$.

- (a) Berechne $|G|$.
- (b) Berechne Erzeuger von $\mathrm{Z}(G)$, sowie $|\mathrm{Z}(G)|$.

**Aufgabe 14 (8 Punkte).** Sei $m \geq 0$, sei $A_m$ die Menge der Abbildungen von $[1,6]$ nach $[1,m]$, und sei $A'_m \subseteq A_m$ die Teilmenge der surjektiven Abbildungen.

(1) Wir interpretieren $A_m$ als die Menge der Perlenfärbungen der 6 Perlen einer Kette mit $m$ möglichen Farben. Auf $A_m$ operiere dementsprechend $G := \langle (1,2,3,4,5,6), (1,6)(2,5)(3,4) \rangle \leq \mathcal{S}_6$ via $\rho \cdot f := f \circ \rho^{-1}$, wobei $\rho \in G$ und $f \in A_m$. Zwei Perlenfärbungen $f$ und $f'$ sind bis auf Perlenkettenbewegung als gleich anzusehen, falls sie in derselben $G$-Bahn von $A_m$ liegen. Bestimme die Anzahl dieser $G$-Bahnen.

(2) Wir interpretieren $A'_m$ als die Menge der Seitenfärbungen eines Würfels mit $m$ möglichen Farben, mit der Zusatzbedingung, daß jede mögliche Farbe wenigstens einmal auftreten soll. Auf $A'_m$ operiert dementsprechend $H := \langle (1,2,6,5), (1,3,6,4) \rangle \leq \mathcal{S}_6$ via $\rho \cdot f := f \circ \rho^{-1}$, wobei $\rho \in H$ und $f \in A'_m$. Zwei Würfelfärbungen $f$ und $f'$ sind bis auf Würfeldrehung als gleich anzusehen, falls sie in derselben $H$-Bahn von $A'_m$ liegen. Bestimme die Anzahl dieser $H$-Bahnen.




**Aufgabe 15 (5 Punkte).** Seien $G$ eine endliche Gruppe und $M$ eine endliche $G$-Menge. Ist $x \in G$, so schreiben wir $\mathrm{Fix}_M(x) := \{m \in M \ : \ xm = m\}$ für die Menge der Fixpunkte von $x$. Wir schreiben $\mathrm{ConjCl}(G)$ für ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von $G$. Sei ferner $M \times M$ eine $G$-Menge via $g(m,n) := (gm, gn)$ für $g \in G$ und $(m,n) \in M \times M$. Zeige oder widerlege.

(1) Sind $x,\ g \in G$, so ist $|\operatorname{Fix}_M(x)| = |\operatorname{Fix}_M({}^g x)|$.

(2) Es ist $|G \backslash M| = \sum_{x \in \mathrm{ConjCl}(G)} \frac{|\operatorname{Fix}_M(x)|}{|\mathrm{C}_G(x)|}$.

(3) Es ist $\sum_{x \in G} |\{gU \in G/U \ : \ {}^{g^{-1}}x \in U\}| = |G|$.

(4) Ist $M$ eine transitive $G$-Menge, so besteht $M \times M$ aus $|M|$ Bahnen unter $G$.

(5) Es besteht $M \times M$ aus $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |\operatorname{Fix}_M(x)|^2$ Bahnen unter $|G|$.