

Blatt 2

Aufgabe 8 (2+1+1 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe, und schreibe $n := |G|$.

- (1) Zeige, daß G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}_n$ ist. (*Satz von Cayley.*)
- (2) Sei $\mathcal{A}_m := \text{Kern}(\mathcal{S}_m \xrightarrow{\text{sgn}} \{-1, +1\})$ die *alternierende Gruppe*, wobei $m \geq 0$.
Zeige, daß G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_{2n}$ ist.
- (3) Gib ein Beispiel für eine Gruppe G , welche nicht isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_{2n-1}$ ist.

Aufgabe 9 (12 Punkte). Sei $D_8 := \langle (1, 2, 3, 4), (1, 3) \rangle \leq \mathcal{S}_4$. Seien darin $C_4 := \langle (1, 2, 3, 4) \rangle$ und $C_2 := \langle (1, 3) \rangle$. Die $\mathcal{S}_4$ -Menge $\mathcal{S}_4/C_4$ wird durch Einschränkung zu einer $\mathcal{A}_4$ -Menge, zu einer D_8 -Menge, zu einer C_4 -Menge resp. zu einer C_2 -Menge.

Gib mittels Bahnalgorithmus auf $\mathcal{S}_4/C_4$ die Bahnen an

- (1) der C_2 -Operation,
- (2) der C_4 -Operation,
- (3) der D_8 -Operation und
- (4) der $\mathcal{A}_4$ -Operation.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Sei G eine endliche Gruppe, und sei p ein *Primteiler* von $|G|$. Betrachte

$$M := \{(g_1, \dots, g_p) : g_i \in G, g_1 \cdots g_p = 1\}.$$

Sei $C_p = \langle a \rangle$ eine zyklische Gruppe von Ordnung p .

- (1) Zeige, daß C_p via $a \cdot (g_1, \dots, g_p) := (g_p, g_1, \dots, g_{p-1})$ auf M operiert.
- (2) Bestimme die Menge $\text{Fix}_{C_p}(M) := \{m \in M : am = m\}$ der Fixpunkte dieser Operation. Welche Länge haben die Bahnen, die keinen Fixpunkt enthalten?
- (3) Zeige, daß $p \mid |\text{Fix}_{C_p}(M)|$.
- (4) Zeige, daß es in G wenigstens ein Element der Ordnung p gibt. (*Satz von Cauchy.*)

Aufgabe 11 (2+2+1+1 Punkte). Sei K ein endlicher Körper aus q Elementen. Sei $n \geq 1$ und $m \in [0, n]$.

- (1) Berechne die Länge der Konjugiertenklassen von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $\text{GL}_2(K)$.
- (2) Berechne die Länge der Konjugiertenklasse von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $\text{GL}_2(K)$. (Hinweis: Fallunterscheidung je nach Nullstellen von $X^2 - X - 1$ in K .)
- (3) Wieviele m -dimensionale Unterräume gibt es in K^n ? (Hinweis: Betrachte die Menge der m -dimensionalen Unterräume von K^n als $\text{GL}_n(K)$ -Menge.)
- (4) Wieviele Matrizen in $K^{n \times n}$ von Rang m gibt es? (Hinweis: Betrachte $K^{n \times n}$ als $\text{GL}_n(K) \times \text{GL}_n(K)$ -Menge, und darin eine Bahn.)

Aufgabe 12 (3 Punkte). Sei G eine Gruppe. Zeige oder widerlege.

- (1) Es operiere G auf sich und auf der Menge der Untergruppen von G , geschrieben $\mathfrak{U}(G)$, via Konjugation. Dann ist die Abbildung $G \longrightarrow \mathfrak{U}(G)$, $g \longmapsto \text{Stab}_G(g)$, eine G -verträgliche Abbildung.
- (2) Sind U und V isomorphe Untergruppen von G , so sind ihre Normalisatoren isomorph.
- (3) Sind U und V Untergruppen von G derart, daß $V = \alpha(U)$ für ein $\alpha \in \text{Aut } G$, so sind ihre Normalisatoren isomorph.