

Blatt 13**Aufgabe 53 ((3+2+1)·3 Punkte).**

- (i) Bestimme Erzeuger für die Galoisgruppe $\text{Gal}(E|K)$, eingebettet in eine geeignete symmetrische Gruppe.
- (ii) Bestimme Erzeuger für alle echten Zwischenkörper $K \subsetneq F \subsetneq E$.
- (iii) Entscheide, welche der Zwischenkörper aus (ii) galoisch über K sind.
Entscheide, über welchen der Zwischenkörper aus (ii) die Erweiterung E galoisch ist.
- (1) $E := L$ und K wie in Aufgabe 49 (2).
- (2) E und K wie in Aufgabe 50 (1).
- (3) E und K wie in Aufgabe 50 (2).

Aufgabe 54 (2+2+6+2 Punkte).

Sei $n \geq 1$, und sei $E := \mathbf{Q}(X_1, \dots, X_n)$. Es operiert $\mathcal{S}_n$ auf $\mathbf{Q}(X_1, \dots, X_n)$ vermöge $\sigma(X_i) := X_{\sigma(i)}$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Sei $K := \text{Fix}_{\mathcal{S}_n}(E) = \{\xi \in E \mid \sigma(\xi) = \xi \text{ für alle } \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ der Fixkörper dieser Operation. Sei

$$(T - X_1)(T - X_2) \cdots (T - X_n) =: T^n + \sum_{i \in [1, n]} (-1)^i s_i T^{n-i} =: f(T)$$

mit dem i -ten elementarsymmetrischen Polynom $s_i \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Schreibe $\tilde{K} := \mathbf{Q}(s_1, \dots, s_n) \subseteq K$.

Sei $L_n := \tilde{K}$, und sei $L_i := L_{i+1}(X_{i+1})$ für $i \in [0, n-1]$. Sei $f_n(T) := f(T)$, und sei $f_i(T) = f_{i+1}(T)/(T - X_{i+1}) \in L_i[T]$ für $i \in [0, n-1]$.

- (1) Zeige, daß $[L_i : L_{i+1}] \leq i + 1$ für $i \in [0, n-1]$. (Hinweis: $f_{i+1}(X_{i+1}) = 0$.) Folgere, daß $[E : \tilde{K}] \leq n!$. Folgere, daß $K = \tilde{K}$.
- (2) Zeige, daß $(X_1^{a_1} X_2^{a_2} \cdots X_n^{a_n} \mid a_i \in [0, i-1])$ eine Basis von E über K ist. Zeige, daß die Koeffizienten eines Elements in $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$ bezüglich dieser Basis in $\mathbf{Z}[s_1, \dots, s_n]$ liegen. Folgere insbesondere, daß jedes Polynom in $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n]$, welches fix unter $\mathcal{S}_n$ ist, bereits in $\mathbf{Z}[s_1, \dots, s_n]$ liegt.
- (3) Sei $n = 3$. Schreibe $(X_1 - X_2)^2(X_1 - X_3)^2(X_2 - X_3)^2$ als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen s_1, s_2 und s_3 mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$.
- (4) Sei K ein Körper, und sei $f(T) = T^3 + uT + v \in K[T]$. Zeige mit (3), daß $f(T)$ in seinem Zerfällungskörper genau dann keine mehrfachen Nullstellen enthält, wenn $4u^3 + 27v^2 \neq 0$.

Aufgabe 55 (2+2+2+2+4 Punkte).

Sei $\Phi_1(X) := X - 1$. Für $m > 1$ sei $\Phi_m(X) := \frac{X^m - 1}{\prod_{\substack{d \mid m \\ d \neq m}} \Phi_d(X)} \in \mathbf{Q}(X)$, wobei $d \mid m$ die Kurzschreibweise sei für $d \in \{c \in \mathbf{Z}_{\geq 1} \mid m \equiv_c 0\}$.

- (1) Zeige, daß $\Phi_m(X) \in \mathbf{Z}[X]$ liegt und normiert ist für $m \geq 1$. (Hinweis: Verwende Zerfällungskörper von $X^m - 1$.)
- (2) Sei ζ_m eine Nullstelle von $\Phi_m(X)$ im Zerfällungskörper E von $\Phi_m(X)$. Zeige, daß $E = \mathbf{Q}(\zeta_m)$. Zeige, daß $\zeta_m^m = 1$, aber $\zeta_m^d \neq 1$ für alle $d \mid m$ mit $d \neq m$ (i.e. ζ_m ist eine primitive m -te Einheitswurzel).
- (3) Sei p eine Primzahl teilerfremd zu m , und sei $i \in [0, m-1]$ teilerfremd zu m . Sei $\Psi(X)$ der normierte irreduzible Faktor von $\Phi_m(X)$, der in E die Nullstelle ζ_m^i hat. Zeige, daß $\Psi(\zeta_m^{ip}) = 0$. (Hinweis: Rechne modulo p , dort ist $g(X^p) = g(X)^p$ für $g(X) \in \mathbf{F}_p[X]$.)
- (4) Zeige mit (3), daß $\Phi_m(X) \in \mathbf{Q}[X]$ irreduzibel ist für $m \geq 1$. Folgere, daß $\Phi_m(X)$ das Minimalpolynom von ζ_m wie auch von $\exp(2\pi i/m) \in \mathbf{C}$ ist.
- (5) Bestimme $\Phi_m(X)$ für $m \in [1, 10]$.