Algebra I, WS 04/05

Blatt 12

Aufgabe 49 (16 Punkte).

Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung, und sei $a \in L$ ein Element.

(i) Bestimme das Minimalpolynom $\mu_{a,K}(X)$ von a über K.

(ii) Bestimme alle Automorphismen von $K(a)$ über K (d.h. alle K-Algebrenautomorphismen von $K(a)$) durch Angabe der Bilder von a. Ist $K(a)$ ein Zerfällungskörper von $\mu_{a,K}(X)$?

(1) $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$, $a = 1 + i$.

(2) $K = \mathbf{Q}$, $L = \mathbf{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$, $a = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

(3) $K = \mathbf{Q}(T^3)$, $L = \mathbf{Q}(T)$, $a = 1 + T$.

(4) $K = \mathbf{F}_3$, $L = \mathbf{F}_3[T]/(T^3 - T + 1)$ ($\simeq \mathbf{F}_{27}$), $a = 1 + \overline{T} + \overline{T}^2$.

Aufgabe 50 ((2+2+1) · 3 Punkte).

Sei K ein Körper, und sei $f(X) \in K[X]$. Sei E ein Zerfällungskörper von $f(X)$.

(i) Bestimme $[E : K]$.

(ii) Gib alle Automorphismen von E über K an.

(iii) Bestimme, falls möglich, ein $a \in E$ mit $E = K(a)$, sowie $\mu_{a,K}(X)$.

(1) $K = \mathbf{Q}$, $f(X) = X^3 - 3$.

(2) $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $f(X) = X^4 - 2X^2 - \sqrt{2}$. (Hinweis: Mit α ist auch $-\alpha$ Nullstelle von $f(X)$.)

(3) $K = \mathbf{F}_3(S^3, T^3)(\subseteq \mathbf{F}_3(S, T))$, $f(X) = (X^3 - S^3)(X^3 - T^3)$.

Aufgabe 51 (3+1 Punkte).

Betrachte die abelsche Gruppe $M := \mathbf{Z}/(3) \oplus \mathbf{Z}/(9) \oplus \mathbf{Z}/(27)$.

(1) Bestimme $|\operatorname{End} M|$.

(2) Bestimme $|\operatorname{Aut} M|$.

Aufgabe 52 (5 Punkte). Sei K ein Körper, und sei L eine endliche Körpererweiterung von K (d.h. $[L : K] < \infty$). Zeige oder widerlege.

(1) Sei $a \in L$. Das charakteristische Polynom der K-linearen Abbildung $L \longrightarrow L$, $t \longmapsto at$ ist gleich $\mu_{a,K}(X)^{[L:K(a)]}$.

(2) Sind $f(X), g(X) \in K[X]$ zwei verschiedene irreduzible normierte Polynome von Grad ≥ 2, so sind ihre Wurzelkörper nicht isomorph.

(3) Sei $f(X) \in K[X]$ ein irreduzibles normiertes Polynom, und sei $a \in L$ mit $f(a) = 0$. Es ist $f(X) = \mu_{a,K}(X)$.

(4) Sei $a \in L$. Es ist $\mu_{a,K}(X) \in K[X]$ irreduzibel.

(5) Sei E eine Körpererweiterung von K, und seien $u, v \in E$. Dann sind u und v algebraisch über K genau dann, wenn $u + v$ und uv algebraisch über K sind.