G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 13.01.05.

Algebra I, WS 04/05

# Blatt 11

**Aufgabe 45 (8 Punkte).**

Sei $R$ ein Hauptidealbereich, seien $m,\, n \geq 1$, und sei der Morphismus $R^n \xrightarrow{f} R^m$ von $R$-Moduln durch die Matrix $A \in R^{m\times n}$ dargestellt. Finde ein $k \geq 0$ und eine Matrix $B \in R^{n\times k}$ so, daß der von ihr dargestellte Morphismus $R^k \xrightarrow{g} R^n$ injektiv ist mit $\mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Kern}(f)$. (Berechnung des Kerns 'in Matrixform'.)

(1) $R = \mathbf{Z}$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 16 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{Z}^{2\times 4}$.

(2) $R = \mathbf{Z}[i]$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1+i & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 1+i & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2-2i & 1-i & 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in R^{3\times 6}$.

(Hinweis: Ist $SAT$ in Elementarteilerform mit $S$, $T$ invertierbar, so wähle für $B$ gewisse Spalten von $T$.)

**Aufgabe 46 (2+2+2+6+6 Punkte).**

Sei $R$ ein kommutativer Ring, und sei folgendes Diagramm von Morphismen von $R$-Moduln gegeben.

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "p'"] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\hat{u}"] & X \arrow[d, "u"] \\ G' \arrow[r, "q'"] & G \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

Hierbei sei $u \circ p = q \circ \hat{u}$, sei $p$ surjektiv, sei $p'(F') = \mathrm{Kern}\, p$, sei $q$ surjektiv, und sei $q'(G') = \mathrm{Kern}\, q$.

Schreibe $\mathrm{Cokern}(u) := Y/u(X) = Y/\mathrm{Bild}(u)$ für den *Cokern* von $u$.

Schreibe $F \oplus G' \xrightarrow{\pi_F} F$, $(f, g') \longmapsto f$. Schreibe $F \oplus G' \xrightarrow{(\hat{u}\ q')} G$, $\left(\begin{smallmatrix} f \\ g' \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \hat{u}(f) + q'(g')$.

Ein Morphismus von $\bigoplus_{j\in[1,l]} R/(a_j)$ nach $\bigoplus_{i\in[1,k]} R/(b_i)$ wird durch eine Matrix $(x_{i,j})_{i\in[1,k],\, j\in[1,l]} \in R^{k\times l}$ repräsentiert und schickt den repräsentierenden Vektor $(r_j)_{j\in[1,l]}$ nach $(\sum_{j\in[1,l]} x_{i,j} r_j)_{i\in[1,k]}$. Für die Einträge dieser Matrix muß stets $(b_i) \supseteq (x_{i,j} a_j)$ gelten.

(1) Zeige, daß $\mathrm{Cokern}((\,\hat{u}\ q'\,)) \simeq \mathrm{Cokern}(u)$.

(2) Zeige, daß $p'(F') \subseteq \mathrm{Kern}(u \circ p) = \pi_F(\mathrm{Kern}\,(\,\hat{u}\ q'\,)) \subseteq F$.

(3) Zeige, daß $\mathrm{Bild}(u) \simeq F/\,\mathrm{Kern}(u \circ p)$ und daß $\mathrm{Kern}(u) \simeq \mathrm{Kern}(u \circ p)/p'(F')$.

(4) Sei $R = \mathbf{Z}$, und sei $(X \xrightarrow{u} Y) = \left(\mathbf{Z}/(4) \oplus \mathbf{Z}/(8) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)} \mathbf{Z}/(2) \oplus \mathbf{Z}/(16)\right)$.
Berechne $\mathrm{Kern}(u)$, $\mathrm{Bild}(u)$ und $\mathrm{Cokern}(u)$ als direkte Summe zyklischer $\mathbf{Z}$-Moduln.

(5) Sei $R = \mathbf{Z}[i]$, und sei $(X \xrightarrow{u} Y) = \left(R/(2) \oplus R/(1+i) \oplus R/(4) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1+i & 2 & 1 \\ 2i & 0 & 1+i \\ 2 & 2-2i & 1-i \end{smallmatrix}\right)} R/(2) \oplus R/(2) \oplus R/(4)\right)$.
Berechne $\mathrm{Kern}(u)$, $\mathrm{Bild}(u)$ und $\mathrm{Cokern}(u)$ als direkte Summe zyklischer $R$-Moduln.

(Hinweis: Wähle $F$, $F'$, $G$ und $G'$ endlich erzeugt frei und übersetze (1) und (2) in Matrixoperationen. Vgl. mit Aufgabe 45.)

**Aufgabe 47 (6 Punkte).**

Sei $R$ ein kommutativer Ring. Es heiße $R$ *noethersch,* wenn es keine echt aufsteigende unendliche Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_2 \subsetneq \mathfrak{a}_3 \subsetneq \ldots \subseteq R$ gibt.

(1) Zeige, daß ein Ring $R$ noethersch ist genau dann, wenn jedes Ideal in $R$ endlich erzeugt ist.

(2) Sei $R$ noethersch und $X$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Sei $Y \subseteq X$ ein Teilmodul. Zeige, daß $Y$ endlich erzeugt ist.

(3) Zeige, daß aus $R$ noethersch auch $R[X]$ noethersch folgt. (Hilbertscher Basissatz.)

(Hinweis: Skript Plesken, S. 93 ff. Die Aufgabe besteht aus Verstehen und eigenständigem Wiedergeben.)

**Aufgabe 48 (3 Punkte).** Zeige oder widerlege.

(1) Hauptidealbereiche sind noethersch.

(2) Es ist $\mathbf{Q}[X, Y]$ ein noetherscher Ring.

(3) Jeder Teilring von $\mathbf{Q}[X, Y]$ ist noethersch.