G. Nebe, M. Künzer Abgabe am 21.10.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 1

Aufgabe 5 (1+1+2+9 Punkte). Sei $n \geq 2$.

(1) Zeige, daß ${}^{\rho}(a_1, \ldots, a_k) = (\rho(a_1), \ldots, \rho(a_k))$ für ρ und $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{S}_n$.

(2) Enthalte die Zykeldarstellung von $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gerade u_m Zykel der Länge m für $m \in [1, n]$. (Hierzu werden ausnahmsweise Zykel der Länge 1 mitberücksichtigt.) Gib die Länge der Konjugiertenklasse $|{}^{\mathcal{S}_n}\sigma|$ an.

(3) Gib die Konjugiertenklassen von $\mathcal{S}_5$ samt jeweiliger Länge an, berechnet nach (2).

(4) Ist U eine Untergruppe einer Gruppe G, so heißt $\mathrm{C}_G(U) := \{g \in G \;:\; {}^{g}u = u \text{ für alle } u \in U\}$ der *Zentralisator* von U in G. Gib je eine nicht zyklische Untergruppe von $\mathcal{S}_4$ von Ordnung 4, 8, und 12 an, sowie jeweils ihren Normalisator und Zentralisator in $\mathcal{S}_4$ sowie ihr Zentrum (vgl. Aufgabe 6 (3)).

Aufgabe 6 (1+1+1+1+2+2+2+1 Punkte).

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{c} & \operatorname{Aut} G \\ g & \longmapsto & (x \longmapsto {}^{g}x)\,. \end{array}$$

D.h. $c(g)$ ist der Automorphismus von G, der $(c(g))(x) = {}^{g}x = gxg^{-1}$ liefert.

(1) Zeige, daß c eine wohldefinierte Abbildung ist, d.h. zeige, daß $c(g)$ in der Tat ein Automorphismus von G ist für alle $g \in G$.

(2) Zeige, daß die Abbildung c einen Morphismus von Gruppen darstellt.

(3) Sei $\mathrm{Z}(G) := \{g \in G \;:\; {}^{g}x = x \text{ für alle } x \in G\}$ das *Zentrum* von G. Zeige: $\mathrm{Z}(G) = \operatorname{Kern} c$.

(4) Wir schreiben $\operatorname{Inn} G := \operatorname{Bild}(c)$ für die Gruppe der *inneren Automorphismen.* Bestimme $\mathrm{N}_{\operatorname{Aut} G}(\operatorname{Inn} G)$.

(5) Sei $G = \mathcal{S}_3$. Zeige, daß c bijektiv ist.

(6) Sei $G = \mathcal{S}_4$. Zeige, daß c bijektiv ist.

(7) Sei $G = \mathcal{S}_5$. Zeige, daß c bijektiv ist.

(8) Gib eine Gruppe G an, für welche c weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 7 (5 Punkte). Sei G eine Gruppe. Zeige oder widerlege.

(1) Ist G endlich, und sind x, $y \in G$, so ist $|\langle x, y\rangle|$ ein Teiler von $|\langle x\rangle| \cdot |\langle y\rangle|$.

(2) Die Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe ist endlich.

(3) Ist $U \leq V \leq G$, so ist $\mathrm{C}_G(U) \geq \mathrm{C}_G(V)$.

(4) Ist $U \leq V \leq G$, so ist $\mathrm{N}_G(U) \geq \mathrm{N}_G(V)$.

(5) Ist $G \xrightarrow{p} H$ ein surjektiver Morphismus von Gruppen, so gibt es einen Morphismus von Gruppen $G \xleftarrow{i} H$ mit $p \circ i = 1_H$.