G. Nebe, M. Künzer Keine Abgabe, vorzurechnen in den Übungsgruppen am 14.10.04.

Algebra I, WS 04/05

Blatt 0

Aufgabe 1.

Für welche $n \geq 0$ ist $\mathcal{S}_n$ eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 2.

Bestimme jeweils die Elemente von $\langle\sigma\rangle$. Was ist die Ordnung von σ ? Gib jeweils das Signum $\operatorname{sgn}\sigma$ an.

(1) $\sigma = (1, 2, 3, 4) \in \mathcal{S}_5$.

(2) $\sigma = (1, 2, 5, 6)(3, 4)(8, 7, 10) \in \mathcal{S}_{10}$

(3) $\sigma = (1, 2)(2, 3) \in \mathcal{S}_3$.

Aufgabe 3.

(1) Sei K ein Körper von Kardinalität q. Bestimme $|\operatorname{GL}_n(K)|$ für ein gegebenes $n \geq 1$.

(2) Ist G eine endliche Gruppe, und $U \leq G$, so zeige, daß $|U|$ ein Teiler von $|G|$ ist. (Hinweis: Unterteile G mittels der Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x \in yU = \{yu\ :\ u \in U\}$.)

(3) Zeige unter Verwendung von (2), daß $n!(q-1)^n$ ein Teiler von $|\operatorname{GL}_n(K)|$ ist.

Aufgabe 4.

Betrachte $G = \operatorname{GL}_3(\mathbf{F}_2)$. Die Ähnlichkeitsklasse einer Matrix darin heißt auch deren *Konjugiertenklasse.* Die Ordnung einer Konjugiertenklasse ist erklärt als Ordnung eines ihrer Repräsentanten.

(1) Finde alle Konjugiertenklassen der Ordnung 7 in G.

(2) Betrachte ein Element $A \in G$ von Ordnung 7. Liegen alle Elemente von $\{A^1, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6\}$ in derselben Konjugiertenklasse?

(3) Gibt es eine Konjugiertenklasse der Ordnung 8 in G ? Entscheide unter Zuhilfenahme des Minimalpolynoms.

(4) Gibt es eine Untergruppe der Ordnung 8 in G ?