G. Nebe, M. Künzer 20.01.2005

Algebra I, WS 04/05

Probeklausur II

Dauer: 150 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1 **(2+9 Punkte)**

Sei $R = \mathbf{Z}[\zeta_3]$ und schreibe $\alpha := \zeta_3 - 1$. Gegeben sei der Morphismus von R-Moduln

$$(X \xrightarrow{u} Y) \;:=\; \left(R/(3) \oplus R/(9) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right)} R/(3) \oplus R/(3) \oplus R/(3) \right) .$$

(1) Zeige, daß $(\alpha)^2 = (3)$ als Ideale in R und daß α ein Primelement in R ist.

(2) Berechne Kern(u), Bild(u) und Cokern(u).

Aufgabe 2 **(4+8+4+2+2 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{F}_3(T)$, und sei $f(X) = X^4 - T$. Sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$.

(1) Zeige, daß $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel ist.

(2) Gib Erzeuger von Gal$(E|K)$ an, eingebettet in eine geeignete symmetrische Gruppe.

(3) Bestimme für alle echten Zwischenkörper $K \subsetneq L \subsetneq E$ Erzeuger über K.

(4) Entscheide, welche der Zwischenkörper aus (3) galoisch über K sind.

(5) Bestimme ein Element $a \in E$ mit $E = K(a)$.
(Hinweis: Es genügt, daß a in keinem echten Zwischenkörper liegt).

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Schreibe $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 \in \mathbf{Q}[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Bestimme ein irreduzibles Polynom von Grad 6 in $\mathbf{F}_2[X]$.

Aufgabe 5 **(5 Punkte)**

Sei $\Phi_m(X)$ das $m$te Kreisteilungspolynom, und sei p eine Primzahl.
Zeige, daß $\Phi_m(X^p) = \Phi_{pm}(X)$, falls p ein Teiler von m ist, und daß $\Phi_m(X^p) = \Phi_{pm}(X)\Phi_m(X)$ sonst.

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Sei $E|K$ eine galoische Körpererweiterung von Grad $n := [E : K] \equiv_2 1$, und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von E über K. Zeige, daß die Determinante der Matrix $(\sigma(x_i))_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E|K),\, i \in [1,n]} \in E^{n \times n}$ in K liegt.

Aufgabe 7 **(9 Punkte)**

Zeige oder widerlege.

(1) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Ist R noethersch, so auch $R_{\mathfrak{p}}$.

(2) Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ algebraisch über $\mathbf{Q}$ mit $\deg \mu_{\alpha,\mathbf{Q}}(X) = \deg \mu_{\beta,\mathbf{Q}}(X) = 2$.
Dann ist auch $\alpha + \beta$ algebraisch über $\mathbf{Q}$ und es ist $\deg \mu_{\alpha+\beta,\mathbf{Q}}(X) \leq 2$.

(3) Sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel, und sei E Zerfällungskörper von $f(X)$. Dann ist $[E : K]$ ein Teiler von $(\deg f)!$.