Probeklausur II

Dauer: 150 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1**(2+9 Punkte)**

Sei $R = \mathbf{Z}[\zeta_3]$ und schreibe $\alpha := \zeta_3 - 1$. Gegeben sei der Morphismus von R -Moduln

$$(X \xrightarrow{u} Y) := \left(R/(3) \oplus R/(9) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}} R/(3) \oplus R/(3) \oplus R/(3) \right).$$

- (1) Zeige, daß $(\alpha)^2 = (3)$ als Ideale in R und daß α ein Primelement in R ist.
- (2) Berechne $\text{Kern}(u)$, $\text{Bild}(u)$ und $\text{Cokern}(u)$.

Aufgabe 2**(4+8+4+2+2 Punkte)**

Sei $K = \mathbf{F}_3(T)$, und sei $f(X) = X^4 - T$. Sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$.

- (1) Zeige, daß $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel ist.
- (2) Gib Erzeuger von $\text{Gal}(E|K)$ an, eingebettet in eine geeignete symmetrische Gruppe.
- (3) Bestimme für alle echten Zwischenkörper $K \subsetneq L \subsetneq E$ Erzeuger über K .
- (4) Entscheide, welche der Zwischenkörper aus (3) galoisch über K sind.
- (5) Bestimme ein Element $a \in E$ mit $E = K(a)$.
(Hinweis: Es genügt, daß a in keinem echten Zwischenkörper liegt).

Aufgabe 3**(6 Punkte)**

Schreibe $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 \in \mathbf{Q}[X_1, X_2, X_3]$ als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen.

Aufgabe 4**(5 Punkte)**

Bestimme ein irreduzibles Polynom von Grad 6 in $\mathbf{F}_2[X]$.

Aufgabe 5**(5 Punkte)**

Sei $\Phi_m(X)$ das m te Kreisteilungspolynom, und sei p eine Primzahl.

Zeige, daß $\Phi_m(X^p) = \Phi_{pm}(X)$, falls p ein Teiler von m ist, und daß $\Phi_m(X^p) = \Phi_{pm}(X)\Phi_m(X)$ sonst.

Aufgabe 6**(4 Punkte)**

Sei $E|K$ eine galoische Körpererweiterung von Grad $n := [E : K] \equiv_2 1$, und sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von E über K . Zeige, daß die Determinante der Matrix $(\sigma(x_i))_{\sigma \in \text{Gal}(E|K), i \in [1, n]} \in E^{n \times n}$ in K liegt.

Aufgabe 7**(9 Punkte)**

Zeige oder widerlege.

- (1) Sei R ein Integritätsbereich, und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal. Ist R noethersch, so auch $R_{\mathfrak{p}}$.
- (2) Seien $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ algebraisch über $\mathbf{Q}$ mit $\deg \mu_{\alpha, \mathbf{Q}}(X) = \deg \mu_{\beta, \mathbf{Q}}(X) = 2$.
Dann ist auch $\alpha + \beta$ algebraisch über $\mathbf{Q}$ und es ist $\deg \mu_{\alpha+\beta, \mathbf{Q}}(X) \leq 2$.
- (3) Sei $f(X) \in K[X]$ irreduzibel und separabel, und sei E Zerfällungskörper von $f(X)$. Dann ist $[E : K]$ ein Teiler von $(\deg f)!$.