

Probeklausur I**Dauer:** 120 Minuten.**Zugelassene Hilfsmittel:** Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.

Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite bearbeitet werden. Wer mehr Papier benötigt, bitte melden.

Aufgabe 1**(4+2+4 Punkte)**Sei $a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbf{F}_2)$, sei $b := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbf{F}_2)$, und sei $G := \langle a, b \rangle \leq \text{GL}_3(\mathbf{F}_2)$.

- (1) Bestimme eine base und zugehörige strong generators von G .
- (2) Ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$? Falls ja, stelle es als Produkt in den Erzeugern a und b dar.
- (3) Bestimme $|Z(G)|$.

Aufgabe 2**(4 Punkte)**Es operiere S_5 auf der Menge

$$A := \{f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\} \mid f \text{ beliebige Abbildung}\}$$

vermöge $(\sigma \cdot f)(i) := f(\sigma^{-1}(i))$ für $1 \leq i \leq 5$. Bestimme die Anzahl der Bahnen. (Potenzen nicht auswerten.)**Aufgabe 3****(3 Punkte)**Sei $G := \langle g, h, k \mid (gh^{-1}k^{-1})^2, h^2gk^{-1}h^3, h g k^{-1} \rangle$. Ist G eine endliche Gruppe?**Aufgabe 4****(6 Punkte)**Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung 360, welche weniger als 120 Elemente der Ordnung 5 enthält.

- (1) Wieviele Untergruppen von Index 4 gibt es in G ?
- (2) Zeige, daß G isomorph zu einer Untergruppe von S_6 ist.
- (3) Zeige, daß G isomorph zu A_6 ist.

Aufgabe 5**(3 Punkte)**Bestimme ein Element von Ordnung 3 in $\text{Aut}(C_2 \times C_2)$.**Aufgabe 6****(4 Punkte)**

Bestimme bis auf Isomorphie alle nichtabelschen Gruppen der Ordnung 55.

Aufgabe 7**(4 Punkte)**Sei $R := \mathbf{Z}[X]/(X^3 - 2)$, und sei p wie angegeben. Zerlege $R/(p)$ in ein ringdirektes Produkt von Körpern, oder gib in $R/(p)$ ein nilpotentes Element ungleich Null an.

- (1) $p = 5$.
- (2) $p = 3$.

Aufgabe 8**(6 Punkte)**Sei G eine endliche Gruppe, und sei p ein Primteiler von $|G|$. Zeige oder widerlege.

- (1) Die Menge der Untergruppen von G von Ordnung p bildet eine transitive G -Menge unter Konjugation.
- (2) Ist P eine normale p -Sylowgruppe von G , so ist P eine charakteristische Untergruppe von G .
- (3) Ist $G' \leq U \leq G$, so ist $U \trianglelefteq G$.