G. Nebe, M. Künzer 29.03.2005

Algebra I, WS 04/05

Nachklausur

Dauer: 180 Minuten.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beliebig beschriebenes Blatt DIN A4.

In der Klausur sind insgesamt 100 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 **(8+4 Punkte)**

Seien $a := (1,2,3,4)$ und $b := (1,3)$ Elemente von $\mathcal{S}_4$, und sei $G := \langle a, b\rangle \leq \mathcal{S}_4$.

(1) Bestimme eine base und strong generators für G.

(2) Ist $(1,2)(3,4) \in G$? Wenn ja, stelle es als Produkt in den Erzeugern a und b dar.

Aufgabe 2 **(4+8 Punkte)**

Sei $R := \mathbf{Z}[i]$ und sei $\alpha := 1 + i$.

(1) Gib $\mu_{\alpha,\mathbf{Q}}(X)$ an. Zeige, daß $\alpha \in R$ prim ist, und daß $(\alpha^2) = (2)$.

(2) Sei

$$(X \xrightarrow{u} Y) \;:=\; \Big(R/(2) \oplus R/(2) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)} R/(4) \oplus R/(2)\Big)\,.$$

Berechne $\mathrm{Bild}(u)$ und $\mathrm{Cokern}(u)$.

Aufgabe 3 **(6+6 Punkte)**

(1) Sei G eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 385. Wieviele Elemente der Ordnung 5 enthält sie?

(2) Zeige, daß es eine nichtabelsche Gruppe von Ordnung 385 gibt.

Aufgabe 4 **(20 Punkte)**

Sei K ein Körper, sei $f(X) \in K[X]$ ein irreduzibles, normiertes und separables Polynom, und sei E der Zerfällungskörper von $f(X)$. Beschreibe das Verfahren zur Konstruktion von E und zur Berechnung von $\mathrm{Gal}(E|K)$ in Worten.

Aufgabe 5 **(10 Punkte)**

Bestimme ein normiertes irreduzibles Polynom von Grad 4 in $\mathbf{F}_3[X]$.

Aufgabe 6 **(10 Punkte)**

Bestimme eine Normalbasis von $\mathbf{Q}(\zeta_5)$ über $\mathbf{Q}$.
(Hinweis: *erst* mit der bekannten Galoisgruppe probieren, *dann* ggf. Methode.)

Aufgabe 7 **(9 Punkte)**

Finde ein idempotentes Element in $\mathbf{Q}[X]/(X^3 - 1)$ ungleich 0 und ungleich 1.
(Hinweis: Chinesischer Restsatz.)

Aufgabe 8 **(15 Punkte)**

Zeige oder widerlege.

(1) Das Produkt zweier elementarsymmetrischer Polynome in $\mathbf{Q}[X_1, X_2, X_3]$ ist wieder ein elementarsymmetrisches Polynom.

(2) Es ist $X^4 + a \in \mathbf{Q}[X]$ irreduzibel für $a > 0$.

(3) Es gibt eine Gruppe G von Ordnung 120, die zwei Normalteiler N_1 und N_2 derart besitzt, daß N_1 isomorph zu $\mathcal{A}_5$ und G/N_2 isomorph zu C_3 ist.