G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Lösung 9

Aufgabe 1.

Sei $K = \mathrm{Z}(D)$. Es sind alle maximalen Teilkörper von Grad $[D : K]^{1/2}$. Da endliche Körper derselben Kardinalität isomorph sind, sind also alle maximalen Teilkörper isomorph, mit Skolem-Noether also konjugiert zu einem solchen, sagen wir L. Da jedes Element x von D in einem Teilkörper $K(x)$ und damit auch in einem maximalen Teilkörper enthalten ist, wird $D^* = \bigcup_d d^{-1}L^*d$, wobei es genügt, d über ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von L^* in D^* laufen zu lassen. Die 1 taucht in jeder dieser Teilmengen $d^{-1}L^*d$ auf. Nehmen wir sie heraus, so erhalten wir

$$\#D^* \;\leq\; (\#D^*/\#L^*)(\#L^* - 1) + 1 \;,$$

i.e. $\#D^* \leq \#L^*$. Es folgt $K = D$.

Aufgabe 2.

Ein maximaler Teilkörper L in D ist wegen $[L : \mathbf{Q}]^2 = 4$ von der Form $L = \mathbf{Q}(\sqrt{-a})$ für ein $a \in \mathbf{Q}^*$. Schreibe $i = \sqrt{-a}$. Wir haben einen Automorphismus σ von L über $\mathbf{Q}$, der i auf $-i$ schickt. Mit Skolem-Noether gibt es also ein $j \in D^*$ mit $j^{-1}ij = -i$, i.e. Konjugation mit j induziert σ auf L. Nun ist $j^2 \in C_D(L) = L$, und sogar, wegen $(j^2)\sigma = j^{-1} \cdot j^2 \cdot j = j^2$, $j^2 =: -b \in \mathbf{Q}^*$. Wir erhalten so einen Isomorphismus $D_{a,b} \xrightarrow{\sim} D$.

Aufgabe 3.

(i) Mit Aufgabe 1 ist $\mathbf{F}_q$ der einzige endlichdimensionale Schiefkörper über $\mathbf{F}_q$ mit Zentrum $\mathbf{F}_q$. Also $\mathrm{Br}(\mathbf{F}_q) = 1$.

(ii) Sei D ein endlichdimensionaler Schiefkörper über $\mathbf{C}$ mit Zentrum $\mathbf{C}$. Angenommen, es gäbe ein $x \in D \smallsetminus \mathbf{C}$. Dann wäre $\mathbf{C}(x)|\mathbf{C}$ eine algebraische Körpererweiterung von Grad > 1, insbesondere wäre $\mu_{x,\mathbf{C}}(X)$ ein irreduzibles Polynom von Grad > 1, und das kann es wegen $\mathbf{C}$ algebraisch abgeschlossen nicht geben. Also ist $D = \mathbf{C}$, und $\mathrm{Br}(\mathbf{C}) = 1$.

(iii) Sei D ein endlichdimensionaler Schiefkörper über $\mathbf{R}$ mit Zentrum $\mathbf{R}$, und sei $R \subset D$. Können wir $D \simeq \mathbf{H_R}$ zeigen, so besteht $\mathrm{Br}(\mathbf{R})$ aus zwei Elementen, und es ist so notwendigerweise $\mathrm{Br}(\mathbf{R}) \simeq C_2$ (d.h. wir haben $\mathbf{H_R} \otimes_\mathbf{R} \mathbf{H_R} \simeq \mathbf{R}^{4\times 4}$ mitbewiesen, cf. Blatt 7, Aufgabe 2 (6)).

Sei L ein maximaler Teilkörper in D. Wegen $[L : \mathbf{R}]^2 = [D : \mathbf{R}]$ ist $\mathbf{R} \subset L$. Da jedes irreduzible Polynom in $\mathbf{R}[X]$ Grad 1 oder Grad 2 hat (sortiere die Linearfaktoren in $\mathbf{C}[X]$ eines beliebigen Polynoms zu komplex konjugierten Paaren), ist $[L : \mathbf{R}] = 2$ und $[D : \mathbf{R}] = 4$. Den Wurzeln eines beliebigen quadratischen Polynoms sieht man an, daß $L \subseteq \mathbf{C}$, also $L = \mathbf{C}$. Speziell gibt es ein $i \in D^*$ mit $i^2 = -1$. Sei, wie in Aufgabe 2, mit Skolem-Noether ein $j_0 \in D^*$ mit $ij_0 = -j_0 i$ und $j_0^2 \in \mathbf{R}^*$ gefunden. Sei $a = |j_0^2|^{-1/2} \in \mathbf{R}_{>0}$, und sei $j = aj_0$. Dann ist weiterhin $ij = -ji$, und nun

$j^2 \in \{-1, +1\}$. Wäre $j^2 = 1$, also $(j-1)(j+1) = 0$, so wäre $j = 1$ oder $j = -1$, jedenfalls also $ij = ji$, und somit $2ij = 0$, Widerspruch zu $2, i, j \in D^*$. Also ist $j^2 = -1$, und wir erhalten einen Isomorphismus $\mathbf{H}_{\mathbf{R}} \xrightarrow{\sim} D$.

(iv) Bezeichne $K = \mathbf{F}_3(X)$ und sei $D = K\langle\langle i, j\rangle\rangle/(i^2+1, j^2+X, ij = -ji) = K\langle 1, i, j, ij\rangle$, $[D : K] = 4$. Wir behaupten, daß D ein Schiefkörper ist. Wegen $ij \neq ji$ ist er nicht kommutativ, d.h. es ist $[D : \mathrm{Z}(D)] \geq 4$, und somit $\mathrm{Z}(D) = K$.

Die Norm von $a+bi+cj+dij$ über K, $a, b, c, d \in K$, berechnet sich zu $(a^2+b^2+c^2X+d^2X)^2$. Wir haben zu zeigen, daß die quadratische Form $a^2+b^2+c^2X+d^2X$ die Null nicht darstellt über K. Wir nehmen an, es werde die Null nichttrivial dargestellt. Dann gibt es auch eine Primitivlösung, i.e. $a, b, c, d \in \mathbf{F}_3[X]$, $\gcd(a, b, c, d) = 1$. Aus $a(X)^2 + b(X)^2 \equiv_X 0$ entnehmen wir $a(0)^2 + b(0)^2 \equiv_3 0$, also $a(0) \equiv_3 0$ und $b(0) \equiv_3 0$, i.e. $a(X) \equiv_X 0$ und $b(X) \equiv_X 0$. Aus $c(X)^2 + d(X)^2 \equiv_X 0$ folgt nun genauso $c(X) \equiv_X 0$ und $d(X) \equiv_X 0$, und das ist ein Widerspruch, da nun X den $\gcd(a, b, c, d)$ teilt.

Es ist $K(i) \simeq \mathbf{F}_9(X)$ ein maximaler Teilkörper, also annulliert $\mathrm{br}(\mathbf{F}_9(X)|\mathbf{F}_3(X))$ das Element $[D] \in \mathrm{Br}(\mathbf{F}_3(X))$.

Aufgabe 4.

(i) Eine Element in $\mathbf{Q}^{4\times 4}$, das mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vertauscht, ist von der Form $\left(\begin{smallmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{smallmatrix}\right)$, mit Blöcken $A_{i,j} \in \mathbf{Q}\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\rangle \simeq \mathbf{Q}(i) \subseteq \mathbf{Q}^{2\times 2}$. Also ist $C \simeq \mathbf{Q}(i)^{2\times 2}$.

(ii) Zunächst ist via $i \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ und $j \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra B isomorph zu $D_{1,x}$, also wegen $1, x > 0$ ein Schiefkörper (cf. Blatt 7, Aufgabe 2 (2)). Es wird

$$C \;=\; \left\{ \left(\begin{smallmatrix} s+ti & (u+vi)j \\ -x(u+vi)j & s+ti \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; s, t, u, v \in \mathbf{Q} \right\} \;\subseteq\; A\,.$$

Via $i \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ und $j \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & j \\ -xj & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist $D_{1,-x} \xrightarrow{\sim} C$. Es ist $D_{1,-x}$ Schiefkörper, falls es ein p prim gibt mit $(-1, x)_p = -1$ (Blatt 7, Aufgabe 2 (2)). Falls nicht, so ist C einfach nach Vorlesung, und hat als Zentrum $\mathbf{Q}$ (loc. cit. (3)). (Einfachheit alternativ: Ist $\xi \neq 0$ in einem Ideal $I \subseteq D_{1,-x}$, so auch $\xi \pm i\xi i$ und $\xi \pm j\xi j$, woraus $I = D_{1,-x}$ ersichtlich wird.) Also $C \simeq \tilde{D}^{m\times m}$ mit $\tilde{D}$ Schiefkörper mit Zentrum $\mathbf{Q}$. Wegen $\dim_{\mathbf{Q}} C = 4$ und $m > 1$ muß $C \simeq \mathbf{Q}^{2\times 2}$ sein. (Konkreten Isomorphismus kenne ich keinen. Man müßte wohl mit einer Darstellung $a^2 + b^2 - xc^2 - xd^2 = 0$ der Null mit $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ ansetzen).

Es ist B zentraleinfach, und a priori C einfach, also $B \otimes_{\mathbf{Q}} C$ einfach. Daraus folgt $B \otimes_{\mathbf{Q}} C \longrightarrow A$, $b \otimes c \longmapsto bc$ injektiv, also auch surjektiv wegen Dimension.

Übrigens haben wir in der Brauergruppe $\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$ damit nachgerechnet, daß $[D_{1,x}][D_{1,-x}] = [D_{1,1}]$. Insbesondere, $D_{1,-x}$ ist genau dann kein Schiefkörper und also $[D_{1,-x}] = [\mathbf{Q}^{2\times 2}] = [\mathbf{Q}] = 1$, wenn $D_{1,x}$ und $D_{1,1}$ isomorph sind.

Aufgabe 5.

(i) Sei $M \xrightarrow{u} N$ ein Epimorphismus. Wir haben zu zeigen, daß er aufspaltet. Sei $M \xleftarrow{v} N$ eine K-lineare Abbildung mit $vu = 1_N$. Sei $M \xleftarrow{\tilde{v}} N$ definiert durch

$$n\tilde{v} \; := \; \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}(ng)vg^{-1} \; .$$

Es ist wiederum $\tilde{v}u = 1_N$, und es ist $\tilde{v}$ dazuhin KG-linear.

(ii) Schreibe $\zeta := \zeta_5$. Man sieht neben den Morphismen nach $\mathbf{Q}^{1\times 1}$ schnell den Morphismus $\mathbf{Q}D_{10} \longrightarrow \mathbf{Q}(\zeta)^{2\times 2}$, $a \longmapsto \left(\begin{smallmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, $b \longmapsto \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, nur ist dieser nicht surjektiv.

Wir konjugieren nun, um Matrizen in $\mathbf{Q}(\zeta+\zeta^{-1}) = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ zu erhalten. Schreibe $\xi := \zeta+\zeta^{-1}$ (es ist $\mu_{\xi,\mathbf{Q}}(X) = X^2+X-1$). Konjugation mit $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ von links liefert zunächst $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}\xi & \zeta-\zeta^{-1}\\ \zeta-\zeta^{-1} & \xi\end{smallmatrix}\right)$, um reelle Diagonaleinträge zu bekommen, Konjugation mit $\left(\begin{smallmatrix}\zeta-\zeta^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ von links liefert schließlich $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}\xi & -\xi-3\\ 1 & \xi\end{smallmatrix}\right)$. Dieselbe Prozedur bringt b nach $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$.

Wir erhalten so einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcccccc}
\mathbf{Q}D_{10} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Q} & \times & \mathbf{Q} & \times & \mathbf{Q}(\sqrt{5})^{2\times 2} \\
a & \longmapsto & (1 & , & 1 & , & \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}\xi & -\xi-3\\ 1 & \xi\end{smallmatrix}\right)) \\
b & \longmapsto & (1 & , & -1 & , & \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)) \; .
\end{array}$$

Unter Verwendung von $\mathbf{C}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\sqrt{5})^{2\times 2} \simeq \mathbf{C}^{2\times 2}\times\mathbf{C}^{2\times 2}$ erhalten wir unter Beachtung des Galoiskonjugierten $-\xi-1$ von ξ durch Aufspalten des letzten Faktors den Isomorphismus

$$\begin{array}{rcccccccc}
\mathbf{C}D_{10} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{C} & \times & \mathbf{C} & \times & \mathbf{C}^{2\times 2} & \times & \mathbf{C}^{2\times 2} \\
a & \longmapsto & (1 & , & 1 & , & \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}\xi & -\xi-3\\ 1 & \xi\end{smallmatrix}\right) & , & \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}-1-\xi & \xi-2\\ 1 & -1-\xi\end{smallmatrix}\right)) \\
b & \longmapsto & (1 & , & -1 & , & \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) & , & \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)) \; .
\end{array}$$

Es hat $\mathbf{Q}D_{10}$ gerade 2^3 Ideale, während $\mathbf{C}D_{10}$ deren 2^4 hat.