G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Lösung 7

Aufgabe 1.

(1)

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : Zu zeigen ist nur (i) $\Longrightarrow$ (ii), die umgekehrte Implikation folgt mit $v = 1_P$. Seien ein Epimorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ und ein Morphismus $P \xrightarrow{v} Y$. Sei $E := \{(p,x) : pv = xf\} \subseteq P \oplus X$ ein Teilmodul. Wir haben einen Epimorphismus $E \xrightarrow{f'} P$, $(p,x) \longmapsto p$, welcher wegen P projektiv aufspaltet, sei etwa $E \xleftarrow{s} P$ ein Morphismus mit $sf' = 1_P$. Ferner haben wir einen Morphismus $E \xrightarrow{v'} X$, $(p,x) \longmapsto x$, und es ist $v'f = f'v$ nach Konstruktion E. Es wird

$$(sv')f \;=\; sf'v \;=\; f\;,$$

wir können also $u = sv'$ verwenden.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) : Sei $P = R\langle p_1, \dots, p_m\rangle$ in Erzeugern geschrieben. Sei $A^m \xrightarrow{\varphi} P$ durch $e_i \longmapsto p_i$ definiert, wobei e_i das i-te Standardbasiselement bezeichne. Da φ epimorph ist, gibt es ein $A^m \xleftarrow{\psi} P$ mit $\psi\varphi = 1_P$. Sei Q der Kern von φ, und bezeichne $Q \xrightarrow{\iota} A^m$ die Inklusion. Sei $A^m \xrightarrow{\pi} Q$, $\xi \longmapsto \xi - \xi\varphi\psi$. Es ist $\iota\pi = 1_Q$. Insgesamt wird

$$A^m \xrightarrow{(\varphi\;\pi)} P \oplus Q$$

von

$$P \oplus Q \xrightarrow{\binom{\psi}{\iota}} A^m$$

beidseitig invertiert, i.e. es ist $(\varphi\;\pi)\binom{\psi}{\iota} = \varphi\psi + \pi\iota = 1$ (nach Definition π) und $\binom{\psi}{\iota}(\varphi\;\pi) = \begin{pmatrix}\psi\varphi & \psi\pi\\ \iota\varphi & \iota\pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1_P & 0\\ 0 & 1_Q\end{pmatrix}$, insbesondere ist $p\psi\pi = p\psi - p\psi\varphi\psi = 0$ für alle $p \in P$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : Sei $P \oplus Q \simeq A^m$, und sei $X \xrightarrow{f} P$ ein Epimorphismus. Dann ist $X \oplus Q \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} P \oplus Q \simeq A^m$ ebenfalls ein Epimorphismus. Da A^m projektiv ist, wie man über eine Wahl der Bilder der Standardbasisvektoren sieht, spaltet dieser Morphismus auf, und mit ihm auch f.

(2) Wir haben wegen der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes nur zu zeigen, daß Monomorphismen auf Monomorphismen gehen. Sei also P ein projektiver A-Rechtsmodul, und sei $M' \xrightarrow{\varphi} M$ ein Monomorphismus von A-Linksmoduln. Es gehen aufspaltende Monomorphismen auf aufspaltende Monomorphismen (ein Monomorphismus i heißt aufspaltend, wenn es ein p gibt mit $ip = 1$). Bezeichnet $P \xrightarrow{\iota} A^m$ eine aufspaltende Inklusion (existent nach (1, iii)), so erhalten wir folgendes kommutatives Viereck mit aufspaltend monomorphen Vertikalen.

$$\begin{tikzcd} A^m \otimes_A M' \arrow[r, "A^m\otimes\varphi"] & A^m \otimes_A M \\ P \otimes_A M' \arrow[r, "P\otimes\varphi"] \arrow[u, "\iota\otimes M'"] & P \otimes_A M \arrow[u, "\iota\otimes M"'] \end{tikzcd}$$

Nun können wir $A^m \oplus \varphi : A^m \otimes_A M' \longrightarrow A^m \otimes_A M$ dank der Additivität des Tensorproduktes mit $\mathrm{diag}(\varphi, \ldots, \varphi) : M'^m \longrightarrow M^m$ identifizieren, was wegen φ monomorph ebenfalls einen Monomorphismus darstellt. Damit muß auch $P \otimes \varphi$ monomorph sein.

(3) Nach Multiplikation mit einem Element aus $R \smallsetminus \{0\}$ dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale sind.

Sei $x \in K$ so, daß $v_\mathfrak{p}(x) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}^{-1})$ für alle Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{b}$, $v_\mathfrak{p}(x) = 0$ für alle Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$, die $\mathfrak{b}$ nicht teilen, und $v_\mathfrak{p}(x) \geq 0$ sonst (cf. Lösung 2, Aufgabe 1 (b), Lemma). Speziell ist also $x \in \mathfrak{b}^{-1}$. Betrachte die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} \xrightarrow{(x\ -1)} \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \xrightarrow{\binom{1}{x}} R \longrightarrow 0\,.$$

Wir *behaupten,* daß diese Sequenz exakt ist.

Exaktheit bei $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ folgt aus R nullteilerfrei.

Exaktheit bei $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Zunächst verschwindet die Komposition. Seien umgekehrt $a \in \mathfrak{a}$ und $b \in \mathfrak{b}$ gegeben mit $a + xb = 0$. Dann wird $x \cdot (ax^{-1}) = a$ und $-1 \cdot (ax^{-1}) = b$, und es bleibt zu zeigen, daß $ax^{-1} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Es genügt, dies lokal bei den maximalen Idealen zu zeigen. Teilt $\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{b}$, so ist nach Konstruktion $x^{-1} \in \mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ und somit $ax^{-1} \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$. Teilt $\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{a}$, aber nicht $\mathfrak{b}$, so ist nach Konstruktion x eine Einheit in $R_\mathfrak{p}$, und somit $ax^{-1} \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$. Teilt $\mathfrak{p}$ weder $\mathfrak{a}$ noch $\mathfrak{p}$, so ist $ax^{-1} = -b \in R_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$, da $b \in R$.

Exaktheit bei R. Mit Blatt 4, Aufgabe 1 (e), genügt es, diese nach Lokalisierung an den maximalen Idealen $\mathfrak{p} \subseteq R$ zu zeigen. Sei π ein Erzeuger des maximalen Ideals von $R_\mathfrak{p}$, sei $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = (\pi^\alpha)$, sei $\mathfrak{b} = (\pi^\beta)$.

Fall : $\mathfrak{p}$ teilt $\mathfrak{b}$. Es ist bereits $\mathfrak{b}_\mathfrak{p} \xrightarrow{x} R_\mathfrak{p}$ epimorph, da $x = \pi^{-\beta}u$ mit einer Einheit $u \in (R_\mathfrak{p})^*$.

Fall : $\mathfrak{p}$ teilt $\mathfrak{b}$ nicht, aber $\mathfrak{a}$. Nun ist $\beta = 0$ und $x \in (R_\mathfrak{p})^*$. Es ist also bereits $R_\mathfrak{p} \xrightarrow{x} R_\mathfrak{p}$ epimorph.

Fall : $\mathfrak{p}$ teilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ nicht. Nun ist $\alpha = 0$. Es ist also bereits $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \xrightarrow{1} R_\mathfrak{p}$ epimorph.

Damit ist die Behauptung gezeigt. Da R projektiv ist, folgt $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \simeq R \oplus \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, cf. (1, i $\Longrightarrow$ iii).

(4) Nach (3) ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{-1} \simeq R^2$, es ist $\mathfrak{a}$ also projektiv nach (1, iii).

(5) Sei $\mathfrak{a} = (a)$ für ein $a \in K$. Dann ist $R \longrightarrow \mathfrak{a}$, $x \longmapsto xa$ ein Isomorphismus.

Sei umgekehrt $\mathfrak{a} \simeq R^m$ für ein $m \geq 0$. Tensorieren mit K über R liefert $K \simeq K \otimes_R \mathfrak{a} \simeq K^m$, also $m = 1$. Sei $a \in \mathfrak{a}$ das isomorphe Bild von $1 \in R$. Es folgt $\mathfrak{a} = (a)$.

Ein Beispiel eines nicht freien projektiven Moduls entnehmen wir e.g. Lösung 3, Aufgabe 3. Sei $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, sei $\mathfrak{a} = (2, 1 + \sqrt{-5})$. Nach (4) ist $\mathfrak{a}$ projektiv über R, nach dem eben gesagten aber nicht frei, da kein Hauptideal.

(6) Es ist $\mathfrak{a}$ projektiv nach (4). Nach (2) ist $\mathfrak{a}\otimes_R \mathfrak{b} \longrightarrow \mathfrak{a}\otimes_R R$, $a\otimes b \longmapsto a\otimes b$, damit injektiv, und somit auch dessen Komposition mit $\mathfrak{a}\otimes_R R \xrightarrow{\sim} R$, $a\otimes x\longmapsto ax$.

Aufgabe 2.

(1) Der Morphismus $D_{1,3}\longrightarrow \Omega$, $i\longmapsto i$, $j\longmapsto 1+2\omega$ ist wegen $i^2=-1$, $(1+2\omega)^2=-3$ und $i(1+2\omega)=-(1+2\omega)i$ wohldefiniert und surjektiv. Aus Dimensionsgründen liegt damit ein Isomorphismus vor.

(2) Für $a=0$ resp. $b=0$ liegt mangels Invertierbarkeit von i resp. j kein Schiefkörper vor. Seien also $a,b\in\mathbf{Q}^*$.

Wir haben einen Isomorphismus

$$\begin{array}{cccccc} D_{a,b} & \otimes_{\mathbf{Q}} & \mathbf{C} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{C}^{2\times 2} \\ i & \otimes & 1 & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -a \\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right) \\ j & \otimes & 1 & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{-b} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-b}\end{smallmatrix}\right) \end{array},$$

der ij nach $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a\sqrt{-b} \\ \sqrt{-b} & 0\end{smallmatrix}\right)$ schickt. Die Norm von $s+ti+uj+vij$, $s,t,u,v\in\mathbf{Q}$, berechnet sich also zu

$$\mathrm{N}(s+ti+uj+vij) \;=\; \det\left(\begin{smallmatrix} s+u\sqrt{-b} & -ta+va\sqrt{-b} \\ t+v\sqrt{-b} & s-u\sqrt{-b}\end{smallmatrix}\right)^2 \;=\; (s^2+at^2+bu^2+abv^2)^2\,.$$

(Eine direkte Verifikation zeigt übrigens, daß diese Formel auch für $a=0$, und analog dazu, auch für $b=0$ gilt.

Wir haben nun zu ermitteln, wann

$$s^2+at^2+bu^2+abv^2$$

die Null nicht darstellt über $\mathbf{Q}$. Nach Hasse-Minkowski genügt es, sie über $\mathbf{Q}_p$ zu betrachten mit p prim oder $p=\infty$ [S, p. 41, th. 8].

Über $\mathbf{R}=\mathbf{Q}_\infty$ wird die Null genau dann nicht dargestellt, wenn $a>0$ und $b>0$. Diesenfalls ist $D_{a,b}$ also ein Schiefkörper.

Sei nun p prim. Nach [S, p. 36 f., th. 6] stellt unsere quadratische Form die Null genau dann nicht dar, wenn

$$(a,b)_p(a,ab)_p(b,ab)_p \;=\; (-a,-b)_p(-1,-1)_p \;\neq\; (-1,-1)_p$$

ist. D.h. es ist $D_{a,b}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_2$ Schiefkörper genau dann, wenn

$$(-a,-b)_p \;=\; -1$$

(cf. [S, p. 39, Remark]).

Resultat. *Es ist $D_{a,b}$ ein Schiefkörper genau dann, wenn $a,b>0$ oder wenn eine Primzahl p existiert mit $(-a,-b)_p=-1$.*

Vgl. auch [S, p. 20, th. 1].

(3) Sei $\xi=s+ti+uj+vij\in D_{a,b}$. Es ist $\xi i=i\xi$ genau dann, wenn $u=0$ und $v=0$, es ist $\xi j=j\xi$ genau dann, wenn $t=0$ und $v=0$. Also ist $\mathrm{Z}(D_{a,b})=\mathbf{Q}\langle 1\rangle\simeq\mathbf{Q}$.

(4) (i) Sei $(y_1,\ldots,y_n)$ eine K-lineare Basis von D. Dann ist $(1\otimes y_1,\ldots,1\otimes y_n)$ eine D-linkslineare Basis von $D^\circ\otimes_K D$. Sei $\xi=\sum_{i\in I} x_i\otimes y_i\in D^\circ\otimes_K D$, wobei I eine Teilmenge von $[1,n]$ von Kardinalität m sei. Ist $m=1$, ist also $\xi = x_i\otimes y_i$ für ein $i\in[1,n]$, so hat man die zweiseitige Linearkombination $\xi(x_i^{-1}\otimes y_i^{-1}) = 1\otimes 1$. Mit Induktion über m genügt es also, mittels einer zweiseitigen Linearkombination aus ξ eine Summe derselben Gestalt der Länge $\leq m-1$ und ungleich 0 zu machen, oder aber direkt $1\otimes 1$.

Mittels Multiplikation mit $x_{i_0}^{-1}\otimes 1$ dürfen wir $x_{i_0}=1$ annehmen.

Falls nun alle $x_i\in K$ liegen, so kann man $\xi = 1\otimes y$ schreiben, und wir erhalten $\xi(1\otimes y^{-1}) = 1\otimes 1$.

Falls aber ein $x_{i_1}\notin K$ liegt, so gibt es ein $b\in D$ mit $x_{i_1}b\neq bx_{i_1}$. Wir erhalten

$$\xi(b\otimes 1)-(b\otimes 1)\xi \;=\; \sum_{i\in I\smallsetminus\{i_0\}} (bx_i - x_ib)\otimes y_i\ ,$$

und das ist ungleich 0, da der Koeffizient von $1\otimes y_{i_1}$ nicht verschwindet, und es ist eine Summe der Länge $\leq m-1$.

(ii) Enthielte der Kern I von

$$\begin{array}{ccccc} D^\circ & \otimes_K & D & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{End}_K D \\ x & \otimes & y & \longmapsto & (z\longmapsto xzy) \end{array}$$

ein Element $\xi\neq 0$, so wäre auch jede beidseitige Linearkombination von ξ in I enthalten, speziell mit (i) auch $1\otimes 1$. Aber die Operation von $1\otimes 1$ auf D ist ungleich 0, Widerpruch.

(iii) Mit (ii) ist ρ injektiv, also aus Dimensionsgründen auch surjektiv.

(5) Es ist $D_{a,b}\xrightarrow{\sim} D_{a,b}^\circ$, $i\longmapsto i$, $j\longmapsto j$, ein wohldefinierter Isomorphismus.

(6) Sei zunächst angenommen, daß $D_{a,b}$ ein Schiefkörper ist. Wir verwenden den Isomorphismus aus (4) unter Beachtung von (5), und schreiben Elemente von $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}} D_{a,b}$ als Matrizen für die Basis $(1,i,j,ij)$. Dies ergibt

$$\begin{array}{rcl} D_{a,b}\otimes_{\mathbf{Q}} D_{a,b} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Q}^{4\times 4} \\ i\otimes 1 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{bmatrix} \\ j\otimes 1 & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1\otimes i & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \\ 1\otimes j & \longmapsto & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Man rechnet nun für allgemeine $a, b \in \mathbf{Q}^*$ direkt nach, daß die Relationen

$$\begin{aligned}
(i \otimes 1)^2 + a \otimes 1 &= 0 \\
(j \otimes 1)^2 + b \otimes 1 &= 0 \\
(i \otimes 1)(j \otimes 1) + (j \otimes 1)(i \otimes 1) &= 0 \\
(1 \otimes i)^2 + 1 \otimes a &= 0 \\
(1 \otimes j)^2 + 1 \otimes b &= 0 \\
(1 \otimes i)(1 \otimes j) + (1 \otimes j)(1 \otimes i) &= 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(1 \otimes i)(i \otimes 1) &= (i \otimes 1)(1 \otimes i) \\
(1 \otimes j)(j \otimes 1) &= (j \otimes 1)(1 \otimes j) \\
(1 \otimes i)(j \otimes 1) &= (j \otimes 1)(1 \otimes i) \\
(1 \otimes j)(i \otimes 1) &= (i \otimes 1)(1 \otimes j)
\end{aligned}$$

auch im Bild gelten, sowie daß die Abbildung surjektiv ist.

(7*) Wir setzen den gesuchten Schiefkörper zu $D_{a,3}$ an, mit $a \in \mathbf{Q}^*$. In $D_{a,3}^{2\times 2}$ finden wir die von $\left(\begin{smallmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Teilalgebra isomorph zu (und identifiziert mit) $D_{1,3}$, also isomorph zu Ω nach (1). Wir wollen den Zentralisator von $D_{1,3}$ bestimmen, d.i.

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) : \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq D_{a,3}^{2\times 2} .$$

Diese Bedingungen liefern $\gamma = -\beta$, $\alpha = \delta$ sowie $\alpha j = j\alpha$ und $\beta j = -j\beta$. In anderen Worten, $\alpha = s + uj$ und $\beta = ti + vij$ für gewisse $s, t, u, v \in \mathbf{Q}$. Wir suchen nun Elemente, die die Relationen der Erzeuger von $D_{1,1}$ erfüllen. Ein Element $\left(\begin{smallmatrix} s+uj & i(t+vj) \\ -i(t+vj) & s+uj \end{smallmatrix}\right)$ des Zentralisators gibt im Quadrat genau dann eine Skalarmatrix, wenn $s = 0$.

Nun ist

$$\left(\begin{smallmatrix} u'j & i(t'+v'j) \\ -i(t'+v'j) & u'j \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} uj & i(t+vj) \\ -i(t+vj) & uj \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -3u'u+at't+3av'v+(t'v-tv')j & -iu'(tj-3v)+iu(t'j-3v') \\ +iu'(tj-3v)-iu(t'j-3v') & -3u'u+at't+3av'v+(t'v-tv')j \end{smallmatrix}\right) .$$

Wir haben also Tripel (t, u, v), (t, u, v) in $\mathbf{Q}$ zu finden mit

$$\begin{array}{rcrcrcr}
att' & - & 3uu' & + & 3a\,vv' & = & 0 \\
at^2 & - & 3u^2 & + & 3a\,v^2 & = & -1 \\
at'^2 & - & 3u'^2 & + & 3a\,v'^2 & = & -1\,.
\end{array}$$

Probieren liefert etwa für $a = -2$ die Lösung $(t, u, v) = \frac{1}{6}(3, 2, 1)$ und $(t', u', v') = \frac{1}{6}(-3, 2, 1)$. Insgesamt erhalten wir einen Morphismus

$$\begin{array}{ccccc}
D_{1,1} & \otimes_{\mathbf{Q}} & D_{1,3} & \longrightarrow & D_{-2,3}^{2\times 2} \\
1 & \otimes & i & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\
1 & \otimes & j & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{smallmatrix}\right) \\
i & \otimes & 1 & \longmapsto & \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 2j & i(3+j) \\ -i(3+j) & 2j \end{smallmatrix}\right) \\
j & \otimes & 1 & \longmapsto & \frac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix} 2j & i(-3+j) \\ -i(-3+j) & 2j \end{smallmatrix}\right) ,
\end{array}$$

welcher mit dem Argument für (4, i) injektiv, und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus ist.