

Lösung 11**Aufgabe 1.**

Wir überprüfen zuerst die Wohldefiniertheit der Gruppen. Wesentlich ist hierbei, daß $B^i \subseteq Z^i$. Für $i = 0$ ist hier nichts zu zeigen. Für $i = 1$ folgt dies mit $d(g) = m - mg$ aus $d(h) - d(gh) + d(g)h = (m - mh) - (m - mgh) + (m - mg)h = 0$. Für $i = 2$ folgt dies mit $f(g, h) = d(h) - d(gh) + d(g)h$ aus $f(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h)k = (d(k) - d(hk) + d(h)k) - (d(k) - d(ghk) + d(gh)k) + (d(hk) - d(ghk) + d(g)hk) - (d(h) - d(gh) + d(g)h)k = 0$.

Für eine kurz exakte Sequenz $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ von $\mathbf{Z}G$ -Moduln haben wir zu zeigen, daß die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(G, M') & \longrightarrow & H^0(G, M) & \longrightarrow & H^0(G, M'') & \xrightarrow{\partial_0} \\ & & H^1(G, M') & \longrightarrow & H^1(G, M) & \longrightarrow & H^1(G, M'') & \xrightarrow{\partial_1} \\ & & H^2(G, M') & \longrightarrow & H^2(G, M) & \longrightarrow & H^2(G, M'') & \end{array}$$

exakt ist.

Überprüfen wir zunächst, daß alle eingetragenen Abbildungen *wohldefiniert* sind.

Sei allgemein $X \xrightarrow{u} Y$ ein Morphismus von $\mathbf{Z}G$ -Moduln. Sei

$$\begin{array}{llll} Z^0(G, X) & \longrightarrow & Z^0(G, Y) , & m \longmapsto mu , \\ Z^1(G, X) & \longrightarrow & Z^1(G, Y) , & d \longmapsto (du : g \longmapsto (d(g))u) , \\ Z^2(G, X) & \longrightarrow & Z^2(G, Y) , & f \longmapsto (fu : (g, h) \longmapsto (f(g, h))u) . \end{array}$$

Mit der $\mathbf{Z}G$ -Linearität von u sehen wir, daß diese Abbildungen wohldefiniert sind, i.e. daß sie Cozykel in Cozykel überführen. Ebenfalls gibt die $\mathbf{Z}G$ -Linearität von u , daß innere Cozykel auf innere Cozykel abgebildet werden. Damit werden die gesuchten Abbildungen $H^i(G, X) \longrightarrow H^i(G, Y)$ induziert.

Wohldefiniertheit von ∂_0 . Zunächst ist $m - mg$ in der Tat in (i.e. im Bild von) M' , da $m - mg \longmapsto m'' - m''g = 0 \in M''$. Das Bild ist in $Z^1(G, M')$, da es eine (sogar innere) Derivation ist, wenn man den Bildbereich zu M erweitert. Für die Unabhängigkeit von der Wahl von $m \longmapsto m''$ dürfen wir nach Betrachtung der Differenz $m'' = 0$ annehmen. Dann aber ist $m \in M'$, d.h. es liegt eine innere Derivation vor, die in $H^1(G, M')$ verschwindet.

Wohldefiniertheit von ∂_1 . Zunächst ist $d(h) - d(gh) + d(g)h$ in der Tat in M' , da $d(h) - d(gh) + d(g)h \longmapsto d''(h) - d''(gh) + d''(g)h = 0 \in M''$. Das Bild ist in $Z^2(G, M')$, da es ein (sogar inneres) Faktorensystem ist, wenn man den Bildbereich zu M erweitert. Für die Unabhängigkeit von der Wahl von $d \longmapsto d''$ dürfen wir nach Betrachtung der Differenz $d'' = 0$ annehmen. Dann aber ist d eine Funktion mit Werten in M' , d.h. es liegt ein inneres Faktorensystem vor, das in $H^2(G, M')$ verschwindet. Damit ist die Abbildung auf der Ebene $Z^1(G, M'') \longrightarrow H^2(G, M')$ wohldefiniert. Um zu zeigen, daß hiervon eine Abbildung $H^1(G, M'') \longrightarrow H^2(G, M')$ induziert wird, haben wir nachzuweisen, daß die

Bilder innerer Derivationen verschwinden. Sei also $d'' \in Z^1(G, M'')$ eine durch $d''(g) := m'' - m''g$ definierte innere Derivation, wobei $m'' \in M''$. Wählen wir $m \mapsto m''$ und setzen $d(g) := m - mg$, dann geht $d \mapsto d''$. Da d nun selbst eine (sogar innere) Derivation ist, ist $d(h) - d(gh) + d(g)h = 0$. (Modulo inneren Faktorensystemen zu rechnen, ist also nur nötig, um die Unabhängigkeit von der getroffenen Urbildwahl von d'' zu garantieren.)

Zeigen wir nun, daß alle *Kompositionen* zweier aufeinanderfolgender Abbildungen *verschwinden*. Bei $H^0(G, M)$, $H^1(G, M)$ und $H^2(G, M)$ folgt das aus der Tatsache, daß wir die Komposition zweier auf den Cohomologiegruppen induzierten Abbildungen zu betrachten haben, nämlich $M' \rightarrow M$ und $M \rightarrow M''$, und deren Komposition selbst schon verschwindet.

Komposition bei $H^0(G, M'')$. Sei $m \in M^G$, und sei $m \mapsto m''$. Dann bildet $m''\partial_0$ das Element g ab auf $m - mg = 0$.

Komposition bei $H^1(G, M')$. Sei $m'' \in M''^G$. Das Bild von $m''\partial_0$ in $H^1(G, M)$ bildet g auf $m - mg$ ab, wobei $m \mapsto m''$. Das ist aber eine innere Derivation in $Z^1(G, M)$.

Komposition bei $H^1(G, M'')$. Sei $d \in Z^1(G, M)$, und sei $d \mapsto d''$. Dann bildet $d''\partial_1$ das Paar (g, h) ab auf $d(h) - d(gh) + d(g)h = 0$.

Komposition bei $H^2(G, M')$. Sei $d'' \in Z^1(G, M'')$. Das Bild von $d''\partial_1$ in $H^2(G, M)$ bildet (g, h) auf $d(h) - d(gh) + d(g)h$ ab, wobei $d \mapsto d''$. Das ist aber ein inneres Faktorensystem in $Z^2(G, M)$.

Zeigen wir nun vollends die *Exaktheit*. Es fehlt noch, daß der jeweilige Kern im jeweiligen Bild liegt.

Exaktheit bei $H^0(G, M')$. Diese übersetzt sich in die Injektivität von $M'^G \rightarrow M^G$, und diese folgt aus der Injektivität von $M' \rightarrow M$.

Exaktheit bei $H^0(G, M)$. Sei $m \in M^G$, und sei $m \mapsto 0$. Dann ist m auch in M' , und also insgesamt in M'^G .

Exaktheit bei $H^0(G, M'')$. Sei $m'' \in M''^G$, und sei $m''\partial_0 = 0$. I.e. sei $m \mapsto m''$, und sei $g \mapsto m - m^g$ eine innere Derivation, sei also ein $m' \in M'$ existent mit $m - m^g = m' - m'^g$ stets. Dann ist $m - m' \in M^G$, und $m - m' \mapsto m''$.

Exaktheit bei $H^1(G, M')$. Sei $d' \in Z^1(G, M')$, und sei das Bild von d' in $Z^1(G, M)$ eine innere Derivation, i.e. gebe es ein $m \in M$ mit $d'(g) = m - mg$ stets. Dann ist $d' = m''\partial_0$, wobei $m \mapsto m''$, und wobei in der Tat $m'' - m''g = 0$ stets, als das Bild von $d'(g) \in M'$.

Exaktheit bei $H^1(G, M)$. Sei $d \in Z^1(G, M)$, und sei das Bild von d in $Z^1(G, M'')$ eine innere Derivation, i.e. gebe es ein $m'' \in M$ mit $d(g) \mapsto m'' - m''g$ stets. Sei $m \mapsto m''$, und sei $\tilde{d}(g) := m - mg$. Es ist $d - \tilde{d} \in Z^1(G, M')$, und $d - \tilde{d} \equiv_{B^1(G, M)} d$.

Exaktheit bei $H^1(G, M'')$. Sei $d'' \in Z^1(G, M'')$, und sei $d''\partial_1 = 0$. I.e. für $d \mapsto d''$ sei $(g, h) \mapsto d(h) - d(gh) + d(g)h$ ein inneres Faktorensystem, i.e. es gebe ein $d' : G \rightarrow M'$ mit $d(h) - d(gh) + d(g)h = d'(h) - d'(gh) + d'(g)h$. Dann ist $d - d' \in Z^1(G, M)$ und $d - d' \mapsto d''$.

Exaktheit bei $H^2(G, M')$. Sei $f' \in Z^2(G, M')$, und sei das Bild von f' in $Z^2(G, M)$ ein inneres Faktorensystem, i.e. gebe es ein $d : G \rightarrow M$ mit $f'(g, h) = d(h) - d(gh) + d(g)h$ stets. Dann ist $f' = d''\partial_1$, wobei $d \mapsto d''$, und wobei in der Tat $d''(h) - d''(gh) + d''(g)h = 0$

stets, als das Bild von $f'(g, h) \in M'$.

Exaktheit bei $H^2(G, M)$. Sei $f \in Z^2(G, M)$, und sei das Bild von f in $Z^2(G, M'')$ ein inneres Faktorensystem, i.e. gebe es ein $d'' : G \rightarrow M$ mit $f(g, h) \mapsto d''(h) - d''(gh) + d''(g)h$ stets. Sei $d \mapsto d''$, und sei $\tilde{f}(g, h) := d(h) - d(gh) + d(g)h$. Es ist $f - \tilde{f} \in Z^2(G, M')$, und $f - \tilde{f} \equiv_{B^2(G, M)} f$.

Wie kann man $H^3(G, M')$ und ∂_2 definieren, um Exaktheit bei $H^2(G, M'')$ zu erhalten?

Aufgabe 2.

- (1) Es ist $x \in L^*$ genau dann fix unter G , wenn $x \in K^*$. Also $H^0(G, L^*) = (L^*)^G = K^*$.
- (2) Wir haben zu zeigen, daß eine Derivation $d \in Z^1(G, L^*)$ inner ist. Betrachte hierzu

$$l(x) := \sum_{g \in G} xg \cdot d(g)$$

für ein $x \in L^*$. Mit Dedekinds Lemma gibt es ein $x \in L^*$ mit $l(x) \in L^*$. Für $h \in G$ wird

$$\begin{aligned} l(x)h &= \sum_{g \in G} xgh \cdot d(g)h \\ &= \sum_{g \in G} xgh \cdot (d(gh)d(h)^{-1}) \\ &= l(x)d(h)^{-1}, \end{aligned}$$

womit $d(h) = l(x)(l(x)h)^{-1}$ als inner nachgewiesen ist.

- (3) Die lange exakte Sequenz aus Aufgabe 1 gibt mit (2) insbesondere die exakte Sequenz

$$H^0(G, L^*) \rightarrow H^0(G, L^*/S^*) \xrightarrow{\partial_0} H^1(G, S^*) \rightarrow 0$$

wobei $L^*/S^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$, $x \mapsto v_s(x)$, und wobei $\mathbf{Z}$ mit der trivialen $\mathbf{Z}G$ -Modulstruktur ausgestattet ist, bezüglich welcher die Multiplikation mit $g \in G$ stets als Identität operiert. In anderen Worten, wir haben eine exakte Sequenz

$$K^* \xrightarrow{v_s} \mathbf{Z} \rightarrow H^1(G, S^*) \rightarrow 0$$

Das Bild von v_s ist wegen $v_s(y) = nv_r(y)$ für $y \in K^*$ gegeben durch $n\mathbf{Z}$. Es folgt $H^1(G, S^*) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Ein Erzeuger ist gegeben durch $d \in Z^1(G, S^*)$ mit $d(g) = s/sg \in S^*$, wie sich aus der Definition von ∂_0 ergibt. Interessant wäre evtl. noch $H^1(G, 1 + s^k S)$.

- (4) Auf der einen Seite ist $\text{Br}(\mathbf{F}_p) = 0$, also auch $\text{Br}(\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p) = 1$. Wegen $H^2(C_2, \mathbf{F}_{p^2}^*) \simeq \text{Br}(\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p)$ und wegen $C_{p^2-1} \simeq \mathbf{F}_{p^2}^*$ als $\mathbf{Z}C_2$ -Moduln (Frobenius!) folgt $H^2(C_2, C_{p^2-1}) = 1$.

Wir wollen nun zeigen, daß jedes normierte Faktorensystem inner ist. Um dies durchführen zu dürfen, müssen wir zunächst begründen, daß jedes Faktorensystem bis auf ein inneres Faktorensystem normiert ist. Dies ist eine allgemeine Tatsache.

Lemma (additiv geschrieben). Sei M ein $\mathbf{Z}G$ -Modul, und sei $f \in Z^2(G, M)$ ein Faktorensystem. Dann gibt es ein normiertes Faktorensystem $f_0 \in Z^2(G, M)$ mit $f - f_0 \in B^2(G, M)$. Normiert zu sein heiße hierbei, es gelte stets $f_0(g, 1) = f_0(1, h) = 0$.

Beweis. Es ist $f_1(g, h) := f(1, h) - f(1, gh) + f(1, g)h = f(1, h) - f(g, h) + f(1 \cdot g, h) - f(1, gh) + f(1, g)h = f(1, h)$ ein inneres Faktorensystem. Sei $f_0(g, h) = f(g, h) - f_1(g, h)$. Es ist $f_0(1, h) = 0$ stets. Ferner ist $f_0(h, 1) = -f_0(1, 1) + f_0(h \cdot 1, 1) - f_0(h, 1 \cdot 1) + f_0(h, 1) = 0$ stets, q.e.d.

Die 2-Cozykelbedingung für eine Funktion mit $f(g, 1) = f(1, h) = 0$ stets ist für (g, h, k) mit $g = 1$ oder $h = 1$ oder $k = 1$ a priori erfüllt. Ist $G = C_2 = \langle \sigma \rangle$, so bleibt also nur $(g, h, k) = (\sigma, \sigma, \sigma)$ zu erfüllen, i.e.

$$f(\sigma, \sigma)f(1, \sigma)^{-1}f(\sigma, 1)(f(\sigma, \sigma)\sigma)^{-1} = 1,$$

i.e. es sollte $f(\sigma, \sigma)$ fix unter σ sein, i.e. $f(\sigma, \sigma) = a^{i(p+1)}$ für ein $i \in [1, p-1]$. Das aus der Funktion d mit $d(1) = 1$ und $d(\sigma) = a^j$ für ein $j \in [1, p^2-1]$ hervorgehende innere Faktorensystem ist normiert, und auf (σ, σ) gegeben durch

$$d(\sigma)d(\sigma \times \sigma)^{-1}d(\sigma)\sigma = d(\sigma) \cdot (d(\sigma)\sigma) = a^{j(1+p)}.$$

Damit ist jedes Faktorensystem inner. Es folgt wiederum $H^2(C_2, C_{p^2-1}) = 1$.

Aufgabe 3.

Reiner folgend führen wir eine Induktion nach m mit $m^2 = [D : K]$ durch. Für $x \in D$ schreiben wir $\mu_{x,K}(X) = \lambda_{x,K}(X^{p^{e(x)}})$ mit $e(x)$ maximal. Dann ist a fortiori $\lambda_{x,K}(X)$ irreduzibel. Wegen $e(x)$ maximal ist $\lambda_{x,K}'(X) \neq 0$, i.e. $\lambda_{x,K}(X)$ ist separabel.

Sei $m > 1$. Sei $y \in D \setminus K$. Es ist D ein $K(y)$ -Vektorraum, und es ist $m^2 = [D : K] = [D : K(y)][K(y) : K] = [D : K(y)]p^{e(y)}$, und wegen $e(y) \geq 1$ teilt p unser m .

Wir behaupten, es gibt $K \subset E \subseteq D$ mit $E|K$ eine separable Körpererweiterung. Ist $\deg \lambda_{x,K} > 1$ für ein $x \in D$, so ist die Behauptung mit $E = K(x^{p^{e(x)}})$ gezeigt, da $\mu_{x^{p^{e(x)}},K}(X) = \lambda_{x,K}(X)$.

Wir haben für unsere Behauptung noch die Annahme, es sei $\deg \lambda_{x,K} = 1$ für alle $x \in D$, zu widerlegen. Sei F ein maximaler Teilkörper, und sei $\alpha : F \otimes_K D \xrightarrow{\sim} F^{m \times m}$. Es ist $(1 \otimes x)\alpha^{p^{e(x)}} = (1 \otimes x^{p^{e(x)}})\alpha = x^{p^{e(x)}}E$, da $x^{p^{e(x)}} \in K$. Mit einer Jordanform über $\bar{F}$ sieht man, daß $\text{Tr}((1 \otimes x)\alpha)^{p^{e(x)}} = \text{Tr}((1 \otimes x)\alpha^{p^{e(x)}}) = 0$. Es ist also $\text{Tr}((1 \otimes x)\alpha) = 0$ für alle $x \in D$. Aber $1 \otimes_K D$ enthält eine F -lineare Basis von $F \otimes_K D$, und somit ist die Spur die Nullform auf $F^{m \times m}$, Widerspruch.

Sei also $K \subset E \subseteq D$ mit $E|K$ separabel, und sei $D' = C_D(E)$, was als endlichdimensionaler Integritätsbereich wiederum ein Schiefkörper ist. Da $C_D(D') = E$ mit dem Doppelzentralisatorsatz, folgt aus $E \subseteq C_{D'}(D') \subseteq C_D(D') = E$, daß $Z(D') = E$. Wegen $[D' : E] < [D : K]$ existiert nach Induktionsvoraussetzung ein maximaler Teilkörper $E \subseteq L \subseteq D'$, für welchen $L|E$ separabel ist. Insgesamt ist $L|K$ separabel. Bleibt zu zeigen, daß L maximal in D ist. Ansonsten finden wir ein $x \in C_D(L) \setminus L$, und es ist $C_D(L) \subseteq C_D(E) = D'$, also $L(x) \subseteq D'$, Widerspruch zu L maximal in D' .

Alternativ kann man im letzten Schritt argumentieren, es ist $[L : K] = [L : E][E : K] = [D' : L][D : D'] = [D : L]$.