

Blatt 9

Abgabe 02.07.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Zeige, daß jeder als Menge endliche Schiefkörper D kommutativ ist. (Hinweis: Schreibe $D^* = \bigcup_d d^{-1}L^*d$ mit Skolem-Noether, L in D maximaler Teilkörper.)

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Jeder Schiefkörper D mit $Z(D) = \mathbf{Q}$ und $[D : \mathbf{Q}] = 4$ ist isomorph zu einem Schiefkörper der Form $D_{a,b}$ für gewisse $a, b \in \mathbf{Q}^*$. (Hinweis: Skolem-Noether für maximalen Teilkörper.)

Aufgabe 3 (8 Punkte).

- (i) Berechne $\text{Br}(\mathbf{F}_q)$ für q eine Primzahlpotenz.
- (ii) Berechne $\text{Br}(\mathbf{C})$.
- (iii) Berechne $\text{Br}(\mathbf{R})$.
- (iv) Finde ein Element der Ordnung 2 in $\text{Br}(\mathbf{F}_3(X))$, welches von $\text{br}(\mathbf{F}_9(X)|\mathbf{F}_3(X))$ annulliert wird (i.e. welches in $\text{Br}(\mathbf{F}_9(X)|\mathbf{F}_3(X))$ liegt).

(Hinweis: verwende in (i) Aufgabe 1, verfare in (iii) wie in Aufgabe 2.)

Aufgabe 4 (6 Punkte).

- (i) Sei $A = \mathbf{Q}^{4 \times 4}$, sei B die darin von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte $\mathbf{Q}$ -Teilalgebra. Zeige, daß B einfach ist. Schreibe die einfache Algebra $C = C_A(B)$ als Matrixring über einem Schiefkörper.
- (ii) Sei $A = \mathbf{H}^{2 \times 2}$, sei $x \in \mathbf{Q}_{>0}$, und sei B die darin von $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ erzeugte $\mathbf{Q}$ -Teilalgebra. Zeige, daß B einfach ist. Schreibe die einfache Algebra $C = C_A(B)$ als Matrixring über einem Schiefkörper der Form $D_{a,b}$. Zeige *ohne weitere Rechnung*, daß $B \otimes_{\mathbf{Q}} C \simeq A$.

Aufgabe 5 (2+4 Punkte).

- (i) Sei K ein Körper der Charakteristik 0, sei G eine endliche Gruppe. Zeige: Der Gruppenring $KG := \{\sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in K\}$, mit der von G induzierten Multiplikation, ist halbeinfach.
- (ii) Sei $D_{10} = \langle a, b \mid a^5, b^2, a^b = a^{-1} \rangle$. Gib für $\mathbf{Q}D_{10}$ und $\mathbf{C}D_{10}$ je einen Isomorphismus in ein direktes Produkt von Matrixringen über Schiefkörpern an. Wieviele Ideale hat $\mathbf{Q}D_{10}$? Wieviele Ideale hat $\mathbf{C}D_{10}$?