

Blatt 8

Abgabe 25.06.

Aufgabe 1 (2+2+12+2 Punkte).

Sei K ein Körper, sei A eine endlichdimensionale K -Algebra.

- (1) Ein Ideal $N \subseteq A$ heißt nilpotent, wenn es ein $m \geq 1$ gibt mit $N^m = 0$. Zeige: es gibt ein nilpotentes Ideal, welches alle nilpotenten Ideale von A enthält. Dieses werde als *Jacobson-Radikal* bezeichnet und $\text{Jac}(A) \subseteq A$ geschrieben.
- (2) Zeige, daß $\text{Jac}(A)$ minimal mit der Eigenschaft ist, daß $A/\text{Jac}(A)$ halbeinfach ist. Speziell ist A halbeinfach genau dann, wenn $\text{Jac}(A) = 0$.
- (3) Bestimme $\text{Jac}(A)$. (Hinweis: verwende (1) und (2).) Gib eine Pierce-Zerlegung von A und von $A/\text{Jac}(A)$ an.
 - (i) $A = \mathbf{Q}[X]/(X^8 - 2X^4 + 1)$.
 - (ii) $A = \mathbf{Q}^{3 \times 3}$. Sind alle nilpotenten Elemente von A in $\text{Jac}(A)$ enthalten?
 - (iii) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}^{3 \times 3} \mid a_{3,1} = a_{3,2} = 0 \right\}$.
 - (iv) $A = \{(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Q}^{3 \times 3} \mid a_{2,1} = a_{3,1} = a_{3,2} = 0, a_{1,1} = a_{2,2}\}$.
 - (v) $A = \{(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Q}^{3 \times 3} \mid a_{3,1} = a_{3,2} = 0, a_{1,1} = a_{2,2}, a_{2,1} = -a_{1,2}\}$.
 - (vi) Wie (v), nur tensoriert mit $\mathbf{Q}(i)$ über $\mathbf{Q}$.
- (4) Um den Zusammenhang zu Blatt 4, Aufgabe 1 (f) herzustellen: zeige, daß $\text{Jac}(A)$ gleich dem Schnitt aller maximalen Linksideale in A ist (und wegen seiner symmetrischen Definition dann auch gleich dem Schnitt aller maximalen Rechtsideale).

Aufgabe 2 (2+10+5+5+2 Punkte).

Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluß von K . Sei $K^{p^{-1}} := \{x \in \bar{K} : x^p \in K\}$, dies definiert einen Teilkörper von $\bar{K}$.

Eine (nicht notwendig endliche) Körpererweiterung $L|K$ heiße *separabel*, falls für jedes über K linear unabhängige Tupel $(x_1, \dots, x_m)$ von Elementen von L auch das Tupel $(x_1^p, \dots, x_m^p)$ über K linear unabhängig ist.

Erinnerung.

- Der Körper K heißt perfekt, falls $K \longrightarrow K, x \longmapsto x^p$ surjektiv ist.
- Ein irreduzibles Polynom in $K[X]$ heißt separabel, wenn es in $\bar{K}[X]$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

- Via $x \cdot (a \otimes b) := axb$ für $x \in L$ und $a \otimes b \in L \otimes_K L$ wird L zu einem $L \otimes_K L$ -Modul.

- (1) Zeige: K ist perfekt genau dann, wenn jede Körpererweiterung $L|K$ separabel ist.
- (2) Sei $[L : K]$ endlich, insbesondere $\bar{K}|L|K$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

- (i) $L|K$ ist separabel.
- (ii) $L \otimes_K K^{p^{-1}} \longrightarrow L^{p^{-1}}$, $x \otimes y \longmapsto xy$, ist injektiv.
- (iii) $L \otimes_K K^{p^{-1}}$ ist ein Körper.
- (iv) $L \otimes_K K^{p^{-1}}$ ist halbeinfach.
- (v) $L \otimes_K F$ ist halbeinfach für jeden Zwischenkörper $\bar{K}|F|K$.
- (vi) L ist projektiv als $L \otimes_K L$ -Modul.
- (vii) $L \otimes_K L \longrightarrow L$, $x \otimes y \longmapsto xy$, spaltet auf als L - L -Bimodulepimorphismus.
- (viii) $L \otimes_K K^{p^{-1}}$ enthält kein nilpotentes Element ungleich 0.
- (ix) Jedes Element von L hat ein separables Minimalpolynom über K (d.i. die Definition Separabilität für endliche Erweiterungen).
- (x) Als $\bar{K}$ -Algebren ist $L \otimes_K \bar{K} \simeq \prod_{i \in I} \bar{K}$, mit $\#I = [L : K]$.
- (xi) $\text{Tr}_{L|K} : L \longrightarrow K$ ist surjektiv.

Als vollständige Lösung wird (i) $\iff$ (vi) $\iff$ (ix) $\iff$ (x) $\iff$ (xi) akzeptiert, die anderen Aussagen sollen dabei helfen.

- (3) Untersuche (2 i, vi, ix, x, xi) im Beispiel $K = \mathbf{F}_2$, $L = \mathbf{F}_4$.
- (4) Untersuche (2 i, vi, ix, x, xi) im Beispiel $K = \mathbf{F}_p(X)$, $L = \mathbf{F}_p(X)^{p^{-1}}$. Zeige dazu zunächst $\mathbf{F}_p(X)^{p^{-1}} = \mathbf{F}_p(X^{p^{-1}})$.
- (5) Zeige: $K(X)|K$ ist separabel.