

Blatt 7

Abgabe 18.06.

Aufgabe 1 (6+2+3+2+2+2 Punkte).

- (1) Sei A ein Ring, sei P ein endlich erzeugter A -Modul. Morphismen seien Morphismen von A -Moduln. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.
 - (i) P ist projektiv (i.e. jeder Epimorphismus $X \rightarrow P$ spaltet auf).
 - (ii) Für jeden Epimorphismus $X \xrightarrow{f} Y$ und jeden Morphismus $P \xrightarrow{v} Y$ gibt es einen Morphismus $P \xrightarrow{u} X$ mit $uf = v$ (man sagt, $\text{Hom}_A(P, -)$ ist exakt).
 - (iii) Es gibt einen A -Modul Q und ein $m \geq 0$ mit $P \oplus Q \simeq A^m$.
- (2) Zeige: Tensorieren mit einem endlich erzeugten projektiven A -Rechtsmodul überführt kurze exakte Sequenzen von A -Linksmoduln in kurze exakte Sequenzen von $\mathbf{Z}$ -Moduln.
- (3) Sei R ein Dedekindbereich, sei K sein Quotientenkörper, und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K$ gebrochene Ideale. Zeige: Es ist $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \simeq R \oplus \mathfrak{a}\mathfrak{b}$.
- (4) Zeige, daß gebrochene Ideale in K projektive Moduln sind (Hinweis: (2) und (1, iii)).
- (5) Ist A ein Ring, so heißt ein endlich erzeugter A -Modul *frei*, falls er isomorph zu einem Modul der Form A^m ist für ein $m \geq 0$.
Zeige, daß ein gebrochenes Ideal in K genau dann frei ist als R -Modul, wenn es ein gebrochenes Hauptideal ist. Gib ein Beispiel eines nicht freien projektiven Moduls an.
- (6) Zeige, daß die Multiplikationsabbildung $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Isomorphismus von R -Moduln ist. (Hinweis: Verwende $\mathfrak{a}$ projektiv, um mit (2) die Injektivität von $\mathfrak{a} \otimes_R \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ zu zeigen.)

Aufgabe 2 (1+4+1+3+1+4+2* Punkte).

Seien $a, b \in \mathbf{Q}$, sei $D_{a,b} := \mathbf{Q}\langle\langle i, j \rangle\rangle / (i^2 + a, j^2 + b, ij + ji) = \mathbf{Q}\langle 1, i, j, ij \rangle$. Notation cf. Blatt 6, Aufgabe 1.

- (1) Zeige: $\Omega \simeq D_{1,3}$.
- (2) Für welche $a, b \in \mathbf{Q}$ ist $D_{a,b}$ ein Schiefkörper?
- (3) Zeige: sind $a, b \neq 0$, so ist das Zentrum $Z(D_{a,b})$ von $D_{a,b}$ isomorph zu $\mathbf{Q}$.

- (4) Sei K ein Körper, und sei D ein Schiefkörper mit Zentrum K . Sei $n := [D : K]$ endlich. Es ist D ein D - D -Bimodul über K , i.e. ein $D^\circ \otimes_K D$ -Rechtsmodul. Die Moduloperation induziert einen Morphismus $D^\circ \otimes_K D \xrightarrow{\rho} \text{End}_K D \simeq K^{n \times n}$. Wir wollen zeigen, daß dies ein Isomorphismus ist.
- (i) Zeige, daß es für jedes Element $\xi = \sum_{i \in [1, m]} x_i \otimes y_i \in D^\circ \otimes_K D$ ungleich 0 eine beidseitige Linearkombination $\sum_{j \in [1, s]} \alpha_j \xi \beta_j = 1 \otimes 1$ gibt, wobei $\alpha_j, \beta_j \in D^\circ \otimes_K D$. (Hinweis: Induktion über m .)
 - (ii) Sei I der Kern von ρ . Zeige mit (i): I enthält kein Element ξ ungleich 0.
 - (iii) Es ist ρ ein Isomorphismus.
- (5) Zeige: $D_{a,b} \simeq D_{a,b}^\circ$.
- (6) Seien $a, b \neq 0$. Gib einen Isomorphismus $D_{a,b} \otimes_{\mathbf{Q}} D_{a,b} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}^{4 \times 4}$ durch Angabe der Bilder von $i \otimes 1, j \otimes 1, 1 \otimes i$ und $1 \otimes j$ an. (Hinweis: verwende (4) und (5).)
- (7*) Finde einen Schiefkörper D so, daß $\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{Q}} \Omega \simeq D^{2 \times 2}$.