

Blatt 6

Abgabe 11.06.

Aufgabe 1 (2+2+2+2+4+2+4+4 Punkte).

Sei K ein Körper von Charakteristik 0. Bezeichne $K\langle\langle i, j \rangle\rangle$ die freie K -Algebra auf i und j , die als K -Basis sämtliche Wörter in i und j hat (einschließlich dem leeren), mit Multiplikation induziert vom Aneinandersetzen dieser Wörter, e.g. $ijjjij \cdot jjj = ijjjijjjj = ij^2ij^3i$. Seien

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_K &:= K\langle\langle i, j \rangle\rangle / (ij + ji, i^2 + 1, j^2 + 1), \\ \Omega_K &:= K\langle\langle i, \omega \rangle\rangle / (i^2 + 1, \omega^2 + \omega + 1, \omega i - i\omega^2).\end{aligned}$$

Die Menge der Primstellen sei bezeichnet als $V := \{p \in \mathbf{Z} : p > 0, p \text{ prim}\} \cup \{\infty\}$, und es sei $\mathbf{Q}_\infty := \mathbf{R}$.

- (1) Gib einen einfachen $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}$ -Modul und einen einfachen $\Omega_{\mathbf{C}}$ -Modul an, beide von Dimension 2 über $\mathbf{C}$. Zeige: $\mathbf{H}_{\mathbf{C}} \simeq \mathbf{C}^{2 \times 2} \simeq \Omega_{\mathbf{C}}$ als $\mathbf{C}$ -Algebren.
- (2) Zeige: $\mathbf{H}_K$ hat die K -lineare Basis $(1, i, j, ij)$, und Ω_K hat die K -lineare Basis $(1, i, \omega, i\omega)$ (Hinweis: es genügt, $K = \mathbf{Q}$ zu betrachten, der Rest folgt mit $K \otimes_{\mathbf{Q}} -$; dann kann man wegen $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}$ für l.u. auf (1) zurückgreifen).
- (3) Zeige, daß die Norm von $a + bi + cj + dij \in \mathbf{H} := \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}$ über $\mathbf{Q}$ gleich $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ ist. Zeige, daß die Norm von $a + b\omega + ci + di\omega \in \Omega := \Omega_{\mathbf{Q}}$ über $\mathbf{Q}$ gleich $(a^2 - ab + b^2 + c^2 - cd + d^2)^2$ ist. (Hinweis: man kann die $\mathbf{C}$ -lineare Norm unter Verwendung von (1) berechnen).
- (4) Zeige, daß $\mathbf{H}$ und Ω Schiefkörper sind. Finde je 2 nicht isomorphe maximale kommutative Teilkörper.
- (5) Für welche Primstellen $v \in V$ ist $\mathbf{H}_v := \mathbf{H}_{\mathbf{Q}_v}$ ein Schiefkörper? Für welche Primstellen $v \in V$ ist $\Omega_v := \Omega_{\mathbf{Q}_v}$ ein Schiefkörper? Für die Primstellen $\neq \infty$, für die dies zutrifft, bestimme man jeweils Verzweigungsindex, Trägheitsindex, die Maximalordnung und darin einen Erzeuger des maximalen Ideals.
- (6) Zeige, daß $\mathbf{H}$ und Ω nicht isomorph sind.
- (7) Für welche $d \in \mathbf{Z}$ quadratfrei kann man einen Isomorphismus von $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ -Algebren $\mathbf{H}_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathbf{Q}(\sqrt{d})}$ angeben, der $i \mapsto i$ schickt? (Wir werden noch sehen, daß letztere Bedingung dank Skolem-Noether keine Einschränkung darstellt).
- (8) Ist $\mathbf{Z}\langle 1, i, j, ij \rangle$ eine Maximalordnung in $\mathbf{H}$? Ist $\mathbf{Z}\langle 1, i, \omega, i\omega \rangle$ eine Maximalordnung in Ω ? Gib je zwei Maximalordnungen in $\mathbf{H}$ und in Ω an. (Hinweis: Betrachte die Spurbilinearform von $\mathbf{H}$ resp. Ω eingeschränkt auf eine Ordnung.)

Aufgabe 2 (4+2+2+2+2+2 Punkte).

- (1) Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung mit $G := \text{Gal}(L|K)$. Gib einen Isomorphismus

$$L \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \prod_{\sigma \in G} L$$

als L -Algebren an.

- (2) Zeige unter Verwendung von (1) erneut, daß für $x \in L$

$$\begin{aligned} N_{L|K}(x) &= \prod_{\sigma \in G} x\sigma \\ \text{Tr}_{L|K}(x) &= \sum_{\sigma \in G} x\sigma, \end{aligned}$$

wobei die Norm als K -lineare Determinante und die Spur als K -lineare Spur der Multiplikation mit x auf L zu verstehen sei.

- (3) Sei $d \in \mathbf{Z}$ quadratfrei, und $d \neq 1$. Sei $K = \mathbf{Q}$, sei $L = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Gib eine orthogonale Zerlegung der 1 in primitive Idempotenten in $L \otimes_K L$ an. Beschreibe das Bild der eingeschränkten Abbildung $\mathbf{Z}_L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_L \hookrightarrow \mathbf{Z}_L \times \mathbf{Z}_L$.
- (4) Sei R ein kommutativer Ring, seien R -Algebren A, B gegeben. Ein A - B -Bimodul M heiße A - B -Bimodul über R , falls für alle $r \in R$ und alle $m \in M$ gilt, daß $rm = mr$. Sei A° (A *opposite*) der Ring, der als abelsche Gruppe mit A übereinstimmt, nur als Multiplikation $a \cdot_{A^\circ} a' := a' \cdot_A a$ trägt. Zeige: Der Begriff eines A - B -Bimoduls über R kann mit dem eines $A^\circ \otimes_R B$ -Rechtsmoduls identifiziert werden (formaler, man hat eine ‘Äquivalenz von Kategorien’, wer möchte).
- (5) Sei $\sigma \in G$ gegeben. Sei L_σ als abelsche Gruppe gleich L , mit der L - L -Bimoduloperation über K ausgestattet, die durch $x \cdot l \cdot y := xl(y\sigma)$ erklärt ist. Zeige: jeder als K -Vektorraum endlichdimensionale L - L -Bimodul über K ist isomorph zu einer direkten Summe von Bimoduln der Form L_σ mit $\sigma \in G$.
- (6) Seien $\rho, \sigma \in G$. Berechne den L - L -Bimodul $L_\rho \otimes_L L_\sigma$ im Sinne von (5), i.e. schreibe ihn bis auf Isomorphie als direkte Summe von Bimoduln der Form L_τ mit $\tau \in G$.