G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Blatt 5

Abgabe 04.06.

Aufgabe 1 (7 Punkte).

Sei p prim. Bestimme $\{x : f(x) = 0\}$ in $\mathbf{F}_p$, in $\mathbf{Z}_p$ (gib eine Approximation modulo p^4 an) und in $\mathbf{Z}_{(p)}$.

(1) $p = 5$, $f(X) = X^2 - 2$.

(2) $p = 7$, $f(X) = X^2 - 2$.

(3) $p = 5$, $f(X) = X^3 - 2$.

(4) $p = 7$, $f(X) = X^3 - 1$.

(5) $p = 3$, $f(X) = X^2 - 3X - 27$.

(6) $p = 3$, $f(X) = X^2 - 3X - 9$.

(7) $p \geq 3$ beliebig, $f(X) = X^{p-1} - 1$. (Hinweis: betrachte j^{p^*} für $j \in [1, p-1]$).

Aufgabe 2 (9 Punkte).

Sei p prim. Zerlege pR und $p\hat{R}$ in Primidealfaktoren. Gib in $\hat{R}$ eine orthogonale Zerlegung der 1 in primitive Idempotente $1 = \sum_{j\in[1,d]} e_j$ an, und berechne die Ringe $\hat{R}e_j$, die in $\hat{R} \simeq \hat{R}e_1 \times \cdots \times \hat{R}e_d$ auftreten, als monogene Erweiterungen von $\mathbf{Z}_p$ (wobei es genüge, dabei auftretende p-adische Zahlen modulo p^4 zu approximieren).

(1) $R = \mathbf{Z}_{(p)}[i]$, $\hat{R} = \mathbf{Z}_p[i]$, $p \in \{2, 3, 5\}$.

(2) $R = \mathbf{Z}_{(p)}[\sqrt[3]{2}]$, $\hat{R} = \mathbf{Z}_p[\sqrt[3]{2}]$, $p \in \{2, 3, 5, 31\}$.

(3) $R = \mathbf{Z}_{(p)}[\zeta_5]$, $\hat{R} = \mathbf{Z}_p[\zeta_5]$, $p \in \{5, 11, 19\}$.

Aufgabe 3 (4+2+2+2 Punkte). Sei $R \subseteq \mathbf{C}$ ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal erzeugt von $r \in R$ und Quotientenkörper K. Sei $s \in \mathbf{C}$ ein ganzes Element über R.

(1) Zeige: es ist $S := R[s]$ genau dann ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal erzeugt von s, wenn $\mu_{s,K}(X) \in R[X]$ ein Eisensteinpolynom ist, i.e. $\mu_{s,K}(X) \equiv_r 0$, $\mu_{s,K}(0) \not\equiv_{r^2} 0$.
(Hinweis: Betrachte $(R/rR)[X]/(X^l) \longrightarrow S/rS$, $X \longmapsto s$.)

(2) Zerlege diesenfalls Sr in S in ein Produkt von Primidealen. Zeige: $R/rR \xrightarrow{\sim} S/sS$, $x \longmapsto x$.

(3) Verifiziere (1) am Beispiel $R = \mathbf{Z}_{(p)}$, $r = p$, $s = \zeta_p - 1$.

(4) Verifiziere (1) am Beispiel $R = \mathbf{Z}_{(p)}[\zeta_p]$, $r = \zeta_p - 1$, $s = \zeta_{p^2} - 1$.