G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Blatt 4

Abgabe 28.05.

Auf diesem umfangreichen Blatt sind 30 Punkte zu vergeben. 20 Punkte werden als 100% gewertet.

Aufgabe 1 (4+2+2+2+2+3 Punkte). Lokalisierung.

Sei R ein kommutativer Ring, sei $S \subseteq R$ eine multiplikatives Teilmonoid von R (i.e. $1 \in S$, $x, y \in S \Longrightarrow xy \in S$).

(a) Sei M ein R-Modul, und sei $S^{-1}M := M \times S/\sim$, wobei $(m, s) \sim (m', s')$ genau dann, wenn es ein $t \in S$ gibt mit $ms't = m'st$. Zeige, daß eine Äquivalenzrelation vorliegt. Die Äquivalenzklasse von (m, s) wird auch als Bruch m/s geschrieben.

  (i) Zeige, daß $S^{-1}M$ vermittels Addition $m/s + m'/s' = (ms' + m's)/ss'$ zu einer abelschen Gruppe wird.

  (ii) Zeige, daß die abelsche Gruppe $S^{-1}R$ vermittels $(r/s)(r'/s') = (rr')/(ss')$ zu einem kommutativen Ring wird, über welchem $S^{-1}M$ vermöge $(m/s)(r'/s') = (mr')/(ss')$ einen Modul bildet. Zeige, daß $R \xrightarrow{\lambda} S^{-1}R$, $x \longmapsto x/1$ ein im allgemeinen nicht injektiver Ringmorphismus ist.

  (iii) Zeige: Ist $R \xrightarrow{f} A$ ein Ringmorphismus in einen kommutativen Ring A mit $Sf \subseteq A^*$, so gibt es genau einen Ringmorphismus $S^{-1}R \xrightarrow{g} A$ mit $\lambda g = f$ (universelle Eigenschaft der Lokalisierung). Zeige, daß die Tatsache, daß $S\lambda \subseteq (S^{-1}R)^*$ und diese eindeutige Faktorisierungseigenschaft den Ring $S^{-1}R$ bis auf einen Ringisomorphismus eindeutig festlegen.

  (iv) Zeige: die Abbildung $\mathfrak{p} \longmapsto \lambda^{-1}(\mathfrak{p})$ vermittelt eine Bijektion der Menge der Primideale von $S^{-1}R$ mit der Menge der Primideale von R, die leeren Schnitt mit S haben.

(b) Sei $\operatorname{Nil}(R) := \{x \in R \;:\; \text{es gibt ein } m \geq 0 \text{ mit } x^m = 0\}$. Zeige, daß $\operatorname{Nil}(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \subseteq R \text{ prim}} \mathfrak{p}$. (Hinweis: nehme echte Inklusion an und verwende $S = \{1, x, x^2, \ldots\}$.)

(c) Zeige: ist $M \xrightarrow{f} M'$ ein Morphismus von R-Moduln, so ist $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M$, $m/s \longmapsto mf/s$ wohldefiniert. Zeige: ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ eine exakte Sequenz von R-Moduln (i.e. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Kern} g$), so auch $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$.

(d) Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ prim, und ist M ein R-Modul, so schreiben wir auch $M_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}M$. Sei nun $R = \mathbf{Z}$, $\mathfrak{p} = (p)$, $m \geq 1$. Berechne die abelsche Gruppe $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})_{(p)}$. Gib alle endlichen $\mathbf{Z}_{(p)}$-Moduln an (b.a. Isomorphie).

(e) Sei M ein R-Modul. Zeige: Ist $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$, so ist $M = 0$. Man folgere, daß ein R-Modulmorphismus f genau dann monomorph, epimorph resp. isomorph ist, wenn dies für $f_{\mathfrak{m}}$ gilt für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$.

(f) (Nakayamas Lemma). Sei M ein endlich erzeugter R-Modul, und bezeichne $\mathrm{Jac}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq R \text{ maximal}} \mathfrak{m}$ das *Jacobson-Radikal* von R. Zeige: ist $j \in \mathrm{Jac}(R)$, so ist $1-j$ invertierbar. Man folgere, daß $\mathrm{Jac}(R)M = M$ impliziert, daß $M = 0$. Man folgere, daß ein R-Modulmorphismus $M \xrightarrow{f} M'$ genau dann epimorph ist, wenn dies für den induzierten Morphismus $M/\mathrm{Jac}(R)M \xrightarrow{\bar{f}} M'/\mathrm{Jac}(R)M'$ gilt. Ist M' projektiv, so hat man dieselbe Äquivalenz auch für die Isomorphie. (Hierbei heißt M' projektiv, wenn es für jeden Epimorphismus $X \xrightarrow{f} M'$ einen Morphismus $M' \xrightarrow{g} X$ gibt mit $gf = 1_{M'}$.)

Aufgabe 2 (2+2+2+9 Punkte).

(a) Seien $L|K$ und $M|K$ Zahlkörpererweiterungen, und sei $E = LM$. Sei $[E:K] = [L:K][M:K]$ (man sagt, L und M sind linear disjunkt über K). Sei R ein diskreter Bewertungsring mit $\mathrm{Quot}\,(R) = K$, und seien $S \subseteq L$, $T \subseteq M$ und $U \subseteq E$ die jeweiligen ganzen Abschlüsse in M. Bezüglich diesen betrachten wir unsere Diskriminanten. Zeige: ist $(\Delta_{M|K}) = (1)$, so ist $U = ST$ und

$$(\Delta_{E|K}) \;=\; (\Delta_{L|K})^{[M:K]}\,.$$

(b) Sei $p \in \mathbf{Z}$ prim, sei $m \geq 1$. Zeige, daß der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbf{Q}(\zeta_{p^m})$ gegeben ist durch $\mathbf{Z}[\zeta_{p^m}]$. Berechne das Diskriminantenideal $(\Delta_{\mathbf{Q}(\zeta_{p^m})|\mathbf{Q}})$.

(c) Sei $n \geq 1$. Zeige, daß der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ gegeben ist durch $\mathbf{Z}[\zeta_n]$. Berechne $(\Delta_{\mathbf{Q}(\zeta_n)|\mathbf{Q}})$. (Hinweis: $\mathbf{Q}(\zeta_{mm'}) = \mathbf{Q}(\zeta_m)\mathbf{Q}(\zeta_{m'})$ für m und m' teilerfremd.)

(d) Bestimme für je ein Primideal in $\mathbf{Z}[\zeta_{24}]$ über den Primidealen

(i) $(2) \subseteq \mathbf{Z}$,

(ii) $(3) \subseteq \mathbf{Z}$,

(iii) $(13) \subseteq \mathbf{Z}$

die Zerlegungsgruppe, die Trägheitsgruppe, den Zerlegungskörper und den Trägheitskörper. Bestätige : zwischen Grundkörper und Zerlegungskörper liegt die Zerlegung, zwischen Zerlegungskörper und Trägheitskörper liegt die Trägheit, und zwischen Trägheitskörper und Erweiterung liegt die Verzweigung. (Hinweis: maple, insbesondere numtheory, ist hilfreich).