

Blatt 3

Abgabe 21.05.

Aufgabe 1 (8 Punkte).

Sei K ein Zahlkörper, sei $[K : \mathbf{Q}] = n$. Sei G die Menge der Körpereinbettungen von K nach $\mathbf{C}$. Sei r die Anzahl der reellen und $2s$ die Anzahl der echt komplexen solcher Einbettungen.

- (a) Sei $t \in \mathbf{R}_{>0}$. Zeige, daß die Teilmenge

$$X_t = \left\{ (z_\tau)_{\tau \in G} \in K_{\mathbf{R}} : \sum_{\tau \in G} |z_\tau| < t \right\} \subseteq K_{\mathbf{R}}$$

zentralsymmetrisch und konvex ist und das Volumen $2^r \pi^s t^n / n!$ hat.

- (b) Zeige: in jeder Idealklasse von K gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ mit

$$N_{K|\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}) \leq \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi} \right)^s \sqrt{|\Delta_{K|\mathbf{Q}}|}.$$

- (c) Zeige: ist $K \neq \mathbf{Q}$, so ist $|\Delta_{K|\mathbf{Q}}| \neq 1$.

- (d) Zeige, daß $5^{-n} |\Delta_{K|\mathbf{Q}}|$ für $n \rightarrow \infty$ gegen ∞ strebt (i.e. für jede Konstante $C > 0$ gibt es ein $N \geq 0$ so, daß $[K : \mathbf{Q}] \geq N$ impliziert, daß $5^{-n} |\Delta_{K|\mathbf{Q}}| > C$).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $M|L|K$ eine iterierte Erweiterung von Zahlkörpern. Seien die folgenden Diskriminanten bezüglich eines diskreten Bewertungsringes $R \subseteq K$ mit $K = \text{Quot}(R)$ bzw. seiner ganzen Abschlüsse in L und M zu verstehen. Zeige:

$$\Delta_{M|K} = \Delta_{L|K}^{[M:L]} \cdot N_{L|K}(\Delta_{M|L}).$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Sei R ein Dedekindbereich, sei $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, und sei $m \geq 1$ mit $\mathfrak{a}^m = (a)$ ein Hauptideal. Sei K der Quotientenkörper von R und sei S der ganze Abschluß von R in $K(a^{1/m})$. Zeige, daß $S\mathfrak{a}$ ein Hauptideal in S ist (man sagt, $\mathfrak{a}$ kapituliert in S).
- (b) Sei $L|K$ eine Erweiterung von Zahlkörpern. Zeige, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(K) & \xrightarrow{\text{Cl}_{L|K}} & \text{Cl}(L) \\ [\mathfrak{a}] & \longmapsto & [\mathbf{Z}_L \mathfrak{a}] \end{array}$$

wohldefiniert ist, wobei $[\mathfrak{a}]$ die Idealklasse von $\mathfrak{a}$ bezeichne. Zeige, daß es für jeden Zahlkörper K eine Zahlkörpererweiterung $L|K$ gibt mit $\text{Cl}_{L|K}$ trivial.

- (c) Berechne ein L mit $\text{Cl}_{L|\mathbf{Q}(\sqrt{-5})}$ trivial.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Berechne die Einheitengruppen in $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ (erneut, aber nun mit Dirichlet!), $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$, $\mathbf{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$, $\mathbf{Z}[\zeta_5]$ und $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$.