G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Blatt 2

Abgabe 14.05.

Aufgabe 1 (6 Punkte).

(a) Sei R ein Integritätsbereich von Charakteristik 0, der von einem ganzen Element ξ über $\mathbf{Z}$ erzeugt wird, $R = \mathbf{Z}[\xi]$ (R ganze monogene Erweiterung von $\mathbf{Z}$). Zeige, daß jedes Primideal ungleich 0 in R von der Form (p, η) ist für ein $p \in \mathbf{Z}$ prim und ein $\eta \in R$.

(b) Sei R ein Dedekindbereich. Zeige, daß jedes Ideal in R von zwei Elementen erzeugt wird. (Hinweis: Chinesischer Restsatz.)

(c) Zeige, daß ein Dedekindbereich mit endlich vielen Primidealen ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

Sei p eine Primzahl. Schreibe $\mathcal{Z} = \mathbf{F}_p[X]$ und $\mathcal{Q} = \mathbf{F}_p(X)$. Sei $d(X) \in \mathcal{Z}$ quadratfrei. Gib eine $\mathcal{Z}$-lineare Basis des Rings der über $\mathcal{Z}$ ganzen Elemente in $\mathcal{Q}(\sqrt{d(X)})$ an.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Berechne die Klassengruppe von $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Berechne die Diskriminante des jeweiligen Ringes. Zerlege die angegebenen Ideale jeweils in ein Produkt von Primidealen.

(a) $(2), (5), (7), (13) \subseteq \mathbf{Z}[\sqrt{-13}]$.

(b) $(2), (3), (5) \subseteq \mathbf{Z}[(1 + \sqrt{-15})/2]$.

(c) Sei $p \geq 3$ prim. Betrachte $(2), (p) \subseteq \mathbf{Z}[\zeta_p]$.