

Blatt 11

Abgabe 16.07.

Aufgabe 1 (9 Punkte).

Sei G eine Gruppe, und sei M ein $\mathbf{Z}G$ -Modul, wobei $\mathbf{Z}G = \{\sum_{g \in G} z_g g : z_g \in \mathbf{Z}\}$ den mit der von G induzierten Multiplikation versehenen Gruppenring von G bezeichne. I.e. M ist eine abelsche Gruppe mit einer (diesbezüglich distributiven) Operation von G .

- (0) Sei $H^0(G, M) = Z^0(G, M) = M^G := \{m \in M : m - mg = 0 \text{ stets}\}$ die *nullte Cohomologiegruppe* von G mit Koeffizienten in M . Ein $m \in Z^0(G, M)$ heißt auch *0-Cozykel*. Sei $B^0(G, M) := 0$ (der Form halber).

- (1) Sei $Z^1(G, M) := \{G \xrightarrow{d} M : d(h) - d(gh) + d(g)h = 0 \text{ stets}\}$. Ein $d \in Z^1(G, M)$ heißt *Derivation* oder auch *1-Cozykel*.

Sei $B^1(G, M) := \{g \mapsto m - mg : m \in M\}$ ('mißglückte 0-Cozykel'). Ein $d \in B^1(G, M)$ heißt *innere Derivation* oder auch *1-Corand*.

Sei $H^1(G, M) := Z^1(G, M)/B^1(G, M)$ die *erste Cohomologiegruppe* von G mit Koeffizienten in M .

- (2) Sei $Z^2(G, M) := \{G \times G \xrightarrow{f} M : f(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h)k = 0 \text{ stets}\}$. Ein $f \in Z^2(G, M)$ heißt *Faktorensystem* oder auch *2-Cozykel*.

Sei $B^2(G, M) := \{(g, h) \mapsto d(h) - d(gh) + d(g)h : G \xrightarrow{d} M\}$ ('mißglückte 1-Cozykel'). Ein $f \in B^2(G, M)$ heißt *inneres Faktorensystem* oder auch *2-Corand*.

Sei $H^2(G, M) := Z^2(G, M)/B^2(G, M)$ die *zweite Cohomologiegruppe* von G mit Koeffizienten in M .

Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbf{Z}G$ -Moduln. Zeige, daß die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(G, M') & \longrightarrow & H^0(G, M) & \longrightarrow & H^0(G, M'') & \xrightarrow{\partial_0} \\ & & H^1(G, M') & \longrightarrow & H^1(G, M) & \longrightarrow & H^1(G, M'') & \xrightarrow{\partial_1} \\ & & H^2(G, M') & \longrightarrow & H^2(G, M) & \longrightarrow & H^2(G, M'') & \end{array}$$

exakt ist. Hierbei seien die nicht bezeichneten Morphismen die von der Komposition mit $M' \rightarrow M$ bzw. $M \rightarrow M''$ induzierten Abbildungen.

Ferner sei ∂_0 dadurch gegeben, daß repräsentantenweise für einen 0-Cozykel $m'' \in Z^0(G, M'')$ zunächst ein $m \mapsto m''$ gewählt und dann m'' der 1-Cozykel $g \mapsto m - mg$ zugeordnet werde.

Schließlich sei ∂_1 dadurch gegeben, daß repräsentantenweise für einen 1-Cozykel $d'' \in Z^1(G, M'')$ zunächst eine Abbildung $G \xrightarrow{d} M$ mit $(G \xrightarrow{d} M \rightarrow M'') = (G \xrightarrow{d''} M'')$ gewählt und dann d'' der 2-Cozykel $(g, h) \mapsto d(h) - d(gh) + d(g)h$ zugeordnet werde.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei $L|K$ endlich galoisch, sei $n = [L : K]$, sei $G = \text{Gal}(L|K)$. Sei $M = L^*$ ein $\mathbf{Z}G$ -Modul vermöge $x \cdot (\sum_{g \in G} z_g g) := \prod_{g \in G} (x^{z_g})g$ für $x \in L^*$ und $\sum_{g \in G} z_g g \in \mathbf{Z}G$. (Vorsicht, hier spielt nun die Multiplikation die Rolle der Addition in Aufgabe 1.)

- (1) Zeige, daß $H^0(G, L^*) = K^*$.
- (2) Zeige, daß $H^1(G, L^*) = 1$ (Theorem Nr. 90 aus Hilberts *Zahlbericht*).
- (3) Sei $R \subseteq K$ ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal Rr und Quotientenkörper K , sei S sein ganzer Abschluß in L . Sei angenommen, daß $S|R$ rein verzweigt ist, i.e. daß S ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal Ss ist so, daß $Ss^n = Sr$. Zeige, daß $H^1(G, S^*) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. (Hinweis: betrachte die kurz exakte Sequenz $1 \longrightarrow S^* \longrightarrow L^* \longrightarrow \underbrace{L^*/S^*}_{\simeq \mathbf{Z}} \longrightarrow 1$, verwende (2) und Aufgabe 1).
- (4) Sei p prim, sei $M = C_{p^2-1} = \langle a \rangle$ (multiplikativ geschrieben), sei $G = C_2 = \langle \sigma \rangle$, und sei auf M mittels $a\sigma := a^p$ eine $\mathbf{Z}C_2$ -Modulstruktur definiert. Zeige direkt, daß $H^2(C_2, C_{p^2-1}) = 1$. Zeige dies unter Zuhilfenahme von $\text{Br}(\mathbf{F}_{p^2}/\mathbf{F}_p)$ erneut.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, und sei D ein Schiefkörper mit $Z(D) = K$. Zeige, daß es in D einen maximalen Teilkörper gibt, der über K separabel ist. (Hinweis: vgl. Reiner, *Maximal Orders*, 7.15.)