G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Blatt 10

Abgabe 09.07.

Durchweg sind p-adische Zahlen approximativ anzugeben.

Aufgabe 1 (18 Punkte).

Sei D eine $\mathbf{Q}$-Algebra, sei $[D : \mathbf{Q}] = m^2$.

(i) Bestimme $\mathrm{endlich}(D) := \{p \text{ prim} \mid D_p := \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} D \text{ Schiefkörper}\}$.

(ii) Sei ζ_{p^m-1} eine primitive $(p^m - 1)$-ste Einheitswurzel über $\mathbf{Q}_p$, und sei $\Phi(X) \in \mathbf{Q}_p[X]$ ihr Minimalpolynom. Gib für $p \in \mathrm{endlich}(D)$ einen Isomorphismus als $\mathbf{Q}_p$-Algebren von

$$\mathbf{Q}_p\langle\langle \zeta, \pi\rangle\rangle/(\Phi(\zeta),\ \pi^m - p,\ \pi\zeta - \zeta^{p^r}\pi)$$

nach D_p an, mit geeignet gewähltem r (der so – bis auf Bezeichnung – bestimmten Hasse-Invarianten).

(iii) Gib für $p \in \mathrm{endlich}(D)$ die $\mathbf{Z}_p$-linearen Elementarteiler der Grammatrix der reduzierten Spurbilinearform auf der Maximalordnung in D_p an.

Wir schreiben $(D_{a,b})_p = D_{a,b;\,p}$, die Indizes a, b verwendet wie in Aufgabe 2 auf Blatt 7.

(a) $D = \mathbf{H} = D_{1,1}$.

(b) $D = D_{-2,3}$.

(c) $D = \mathbf{Q}\langle\langle \xi, \pi\rangle\rangle/(\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1,\ \pi^4 - 2,\ \pi\xi - \xi^2\pi)$.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Bestimme alle $a, b \in \mathbf{Q}^*$ mit $D_{a,b;\,2} \simeq \mathbf{H}_2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Spezifiziere eine maximale unverzweigte Zwischenerweiterung in $L|K$.

(1) $K = \mathbf{Q}_2$, $L = \mathbf{Q}_2(\zeta_{12})$.

(2) $K = \mathbf{Q}_3$, $L = \mathbf{Q}_3(\zeta_{12})$.

(3) $K = \mathbf{F}_3(\!(t)\!)$, $L = \mathbf{F}_3(\!(t)\!)[X]/(X^4 - X^2 + (1 + t))$.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Sei ζ_7 eine primitive 7te Einheitswurzel *über* $\mathbf{Q}$.

(1) Zeige, daß $\mathbf{Q}_2 \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\zeta_7)$ isomorph zu einem direkten Produkt zweier Körper ist.

(2) Gib einen Isomorphismus des ersten Faktors auf den zweiten an.

(3) Welche Minimalpolynome kann eine primitive 7-te Einheitswurzel *über* $\mathbf{Q}_2$ haben?

Aufgabe 5 (3 Punkte).

Sei D ein Schiefkörper mit $\mathrm{Z}(D) = K$ und $[D : K] = m^2$, sei $E|K$ eine endliche Erweiterung mit $[E \otimes_K D] = [E]$ in $\mathrm{Br}(E)$. Zeige, daß $m \mid [E : K]$. (Hinweis: Betrachte D-Dimension von Summanden von $E \otimes_K D$.)