G. Nebe, M. Künzer

Übungen Algebra II, Sommersemester 03

Blatt 1

Abgabe 07.05.

Literaturhinweis für dieses Blatt: Neukirch, Algebraische Zahlentheorie.

Aufgabe 1 (4 Punkte).

(a) Sei d eine ganze quadratfreie Zahl. Gib eine $\mathbf{Z}$-lineare Basis des Rings der algebraisch ganzen Zahlen in $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ an.

(b) Bestimme die Gruppe der Einheiten und die Primideale in $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

(a) Sei p eine Primzahl in $\mathbf{Z}$ und sei ζ_p eine primitive $p$te Einheitswurzel über $\mathbf{Q}$. Zeige, daß der Ring der ganzen Zahlen in $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ gegeben ist durch $\mathbf{Z}[\zeta_p]$.

(b) Sei nun $p = 3$. Zeige, daß $\mathbf{Z}[\zeta_3]$ ein Hauptidealbereich ist. (Hinweis: euklidisch bzgl. Norm.)

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Welche Primzahlen in $\mathbf{Z}$ lassen sich in der Form $a^2 + b^2$ schreiben mit $a, b \in \mathbf{Z}$? (Hinweis: $\mathrm{N}_{\mathbf{Q}(i)|\mathbf{Q}}(a + bi) = a^2 + b^2$, verwende Primelemente von $\mathbf{Z}[i]$.)

Aufgabe 4 (6 Punkte).

(a) Sei R ein Integritätsbereich, in welchem jedes Element eine Zerlegung als Produkt von Primelementen besitzt. Man sagt, R sei (prim)faktoriell. Zeige, daß eine solche Zerlegung bis auf Einheiten eindeutig ist. Zeige, daß R ganzabgeschlossen ist.

(b) Zeige, daß ein Hauptidealbereich primfaktoriell ist. (Hinweis: betrachte Ideal, welches maximal mit der Eigenschaft ist, daß sein Erzeuger keine Zerlegung in Primfaktoren besitzt.)

(c) Finde einen Ring R algebraisch ganzer Zahlen in einem Zahlkörper und eine Primzahl p in $\mathbf{Z}$ so, daß es in R/pR ein nilpotentes Element von Nilpotenzgrad 3 gibt (d.h. $\min\{m \geq 1 \;:\; x^m \equiv_{pR} 0\} = 3$).