M. Truong, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Lösung 10

Aufgabe 37 Wir betrachten die Diedergruppe D_{12} .

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_{12})$.

(2) Man gebe alle 2-Sylowgruppen von D_{12} an.

(3) Wir betrachten die D_{12}-Menge $X := \mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$, mit der Operation durch Konjugation.
Man zeige: Der Operationsmorphismus $\varphi : \mathrm{D}_{12} \to \mathrm{S}_X$ ist surjektiv.
Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Z}(\mathrm{D}_{12})$.

Lösung. Es ist $\mathrm{D}_{12} = \{\, a^i \circ b^j \,:\, i \in [0,5],\ j \in [0,1]\,\}$, wobei $|\langle a\rangle| = 6$ und $|\langle b\rangle| = 2$ und ${}^b a = a^{-1}$.
Mit anderen Worten, es ist $\mathrm{D}_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, a\circ b, a^2\circ b, a^3\circ b, a^4\circ b, a^5\circ b\}$.

Zu (1). Es ist ${}^a b = a\circ b\circ a^{-1} = a^2\circ b$. Also ist

$$ {}^a(a^i\circ b) \;=\; a^{i+2}\circ b $$

und

$$ {}^a(a^i) \;=\; a^i $$

und

$$ {}^b(a^i\circ b^j) \;=\; a^{-i}\circ b^j $$

für $i,\, j \,\in\, \mathbb{Z}$.
Die einzigen Elemente, die unter Konjugation mit a und mit b fix bleiben, sind 1 und a^3. Also ist

$$ \mathrm{Z}(\mathrm{D}_{12}) \;=\; \{\mathrm{id},\, a^3\} \;=\; \langle a^3\rangle\ . $$

Zu (2). Es ist $V := \mathrm{Z}(\mathrm{D}_{12})\langle b\rangle = \{\mathrm{id}, a^3, b, a^3\circ b\} = \langle a^3, b\rangle$ eine abelsche Untergruppe von D_{12} von Ordnung 4.
Es ist also $V \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$.
Es ist V stabil unter Konjugation mit b. Ferner ist

$$ {}^a V \;=\; \langle\, {}^a(a^3),\, {}^a b\rangle \;=\; \langle a^3, a^2\circ b\rangle $$

und

$$ {}^{a^2} V \;=\; \langle\, {}^{a^2}(a^3),\, {}^{a^2} b\rangle \;=\; \langle a^3, a^4\circ b\rangle $$

Somit ist

$$ {}^{a^i\circ b^j} V \;=\; {}^{a^i} V \;=\; \langle a^3, a^{2i}\circ b\rangle $$

für $i,\, j \,\in\, \mathbb{Z}$. Da $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12})$ eine transitive D_{12}-Menge unter Konjugation ist, folgt

$$ \mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12}) \;=\; \{V,\, {}^a V,\, {}^{a^2} V\} \;=\; \{\, \langle a^3, b\rangle,\ \langle a^3, a^2\circ b\rangle,\ \langle a^3, a^4\circ b\rangle \,\}\ . $$

Zu (3). Wir schreiben $V_1 := V$, $V_2 := {}^a V$ und $V_3 := {}^{a^2} V$. Es ist also

$$ X \;=\; \mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{12}) \;=\; \{\, V_1,\, V_2,\, V_3 \,\}\ . $$

Wir haben den Gruppenisomorphismus $\psi : \mathrm{S}_3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}_X : f \mapsto (V_i \mapsto V_{f(i)})$, vgl. Aufgabe 36.(1).
Es ist ${}^a V_1 = V_2$, ${}^a V_2 = V_3$ und ${}^a V_3 = V_1$. Also ist $\varphi(a) = \psi((1,2,3))$.
Es ist ${}^b V_1 = V_1$. Es ist

$$ {}^b V_2 \;=\; \langle\, {}^b(a^3),\, {}^b(a^2\circ b)\rangle \;=\; \langle a^3, a^{-2}\circ b\rangle \;=\; V_3\ . $$

Folglich ist ${}^b V_3 \;=\; {}^{b^2} V_2 = V_2$. Insgesamt ist $\varphi(b) = \psi((2,3))$.
Da $\mathrm{S}_3 = \langle (1,2,3),\, (2,3)\rangle$, ist auch

$$ \mathrm{S}_X \;=\; \langle \psi((1,2,3)),\, \psi((2,3))\rangle \;=\; \langle \varphi(a), \varphi(b)\rangle \;=\; \varphi(\langle a, b\rangle) \;=\; \varphi(\mathrm{D}_{12})\ . $$

Somit ist der Gruppenmorphismus $\varphi : \mathrm{D}_{12} \to \mathrm{S}_X$ surjektiv.

Es ist übrigens $\mathrm{D}_{12} \simeq \mathrm{D}_6 \times \mathrm{C}_2$: Es ist $U := \langle a^2, b\rangle \trianglelefteqslant \mathrm{D}_{12}$ als Untergruppe von Index 2. Es ist $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_{12}) \trianglelefteqslant \mathrm{D}_{12}$. Diese beiden Normalteiler haben Schnitt 1. Das Produkt ihrer Ordnungen ist 12. Also ist D_{12} isomorph zum direkten Produkt dieser beiden Normalteiler und damit auch $\mathrm{D}_{12} \simeq \mathrm{D}_6 \times \mathrm{C}_2$.

Aufgabe 38 Sei $U := \langle \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) =: G$.

(1) Man bestimme einen Gruppenisomorphismus $\varphi : \mathrm{D}_8 \to U$.

(2) Es operiert U auf $X := \mathbb{F}_5^{2\times 1}$ durch Matrixmultiplikation.
Man finde ein Element $x \in X$ mit $|\operatorname{Stab}_U(x)| = 2$.

(3) Sei $D := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a,\, d \in \mathbb{F}_5^\times \} \leqslant G$.
Man zeige: Es ist $U \leqslant \mathrm{N}_G(D)$. Es ist $|D \cap U| = 4$. Es ist $UD \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Lösung.
Zu (1). Mit $a := (1,2,3,4)$ und $b := (2,4)$ ist $\mathrm{D}_8 = \{ a^i \circ b^j : i \in [0,3],\, j \in [0,1] \} = \{ a^i \circ b^j : i,\, j \in \mathbb{Z} \}$.
Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_8 & \xrightarrow{\varphi} & U \\ a^i \circ b^j & \mapsto & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^j \end{array}$$

ist wohldefiniert, da a von Ordnung 4 und b von Ordnung 2 ist und da $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^4 = \mathrm{E}_2$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \mathrm{E}_2$ ist.
Wir zeigen, daß φ ein Gruppenmorphismus ist. Seien $i,\, i' \in [0,3]$ und $j,\, j' \in [0,1]$ gegeben.
Wir haben zu zeigen, daß $\varphi(a^i \circ b^j) \cdot \varphi(a^{i'} \circ b^{j'}) \overset{!}{=} \varphi(a^i \circ b^j \cdot a^{i'} \circ b^{j'})$ ist.
Fall $j = 0$. Es wird

$$\begin{array}{rclcl} \varphi(a^i \circ b^j) \cdot \varphi(a^{i'} \circ b^{j'}) & = & \varphi(a^i) \cdot \varphi(a^{i'} \circ b^{j'}) & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^{i'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^{i+i'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} & = & \varphi(a^{i+i'} \circ b^{j'}) \\ & = & \varphi(a^i \circ b^j \circ a^{i'} \circ b^{j'})\,. & & \end{array}$$

Fall $j = 1$. Es wird

$$\begin{array}{rclcl} \varphi(a^i \circ b^j) \cdot \varphi(a^{i'} \circ b^{j'}) & = & \varphi(a^i \circ b) \cdot \varphi(a^{i'} \circ b^{j'}) & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^{i'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2^{i'} & 0 \\ 0 & (-2)^{i'} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{i'} \\ 2^{i'} & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \begin{pmatrix} (-2)^{i'} & 0 \\ 0 & 2^{i'} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^{-i'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{j'} \\ & = & \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^{i-i'} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{1+j'} & = & \varphi(a^{i-i'} \circ b^{1+j'}) \\ & = & \varphi(a^i \circ (a^{-1})^{i'} \circ b \circ b^{j'}) & = & \varphi(a^i \circ b \circ a^{i'} \circ b^{j'}) \\ & = & \varphi(a^i \circ b^j \circ a^{i'} \circ b^{j'})\,. & & \end{array}$$

Es ist φ surjektiv, da beide angegebenen Erzeuger im Bild von φ liegen.
Bleibt zu zeigen, daß φ injektiv ist. Dazu zeigen wir $\mathrm{Kern}(\varphi) \overset{!}{=} 1$. Sei $i \in [0,3]$ und $j \in [0,1]$ derart gegeben, daß $\varphi(a^i \circ b^j) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)^i \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^j = \mathrm{E}_2$ ist.
Der Eintrag an Position $(1,2)$ in dieser Matrix zeigt, daß $j = 0$ sein muß.
Dann ist $\begin{pmatrix} 2^i & 0 \\ 0 & (-2)^i \end{pmatrix} = \mathrm{E}_2$. Da $2 \in \mathrm{U}(\mathbb{F}_5)$ aber die Ordnung 4 hat, folgt auch $i = 0$.
Insgesamt ist $\varphi : \mathrm{D}_8 \xrightarrow{\sim} U$ ein Gruppenisomorphismus.

Zu (2). Dank (1) ist

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{\varphi(1),\, \varphi(a),\, \varphi(a^2),\, \varphi(a^3),\, \varphi(b),\, \varphi(a \circ b),\, \varphi(a^2 \circ b),\, \varphi(a^3 \circ b)\} \\ & = & \{\varphi(1),\, \varphi(a),\, \varphi(a)^2,\, \varphi(a)^3,\, \varphi(b),\, \varphi(a) \cdot \varphi(b),\, \varphi(a)^2 \cdot \varphi(b),\, \varphi(a)^3 \cdot \varphi(b)\} \\ & = & \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \}\,. \end{array}$$

Wir bestimmen die Bahnen von X unter der Operation von U.

Es wird

$$\begin{aligned}
U\binom{0}{0} &= \{\binom{0}{0}\} \\
U\binom{1}{0} &= \{\binom{1}{0}, \binom{2}{0}, \binom{-1}{0}, \binom{-2}{0}, \binom{0}{1}, \binom{0}{-2}, \binom{0}{-1}, \binom{0}{2}\} \\
U\binom{1}{1} &= \{\binom{1}{1}, \binom{2}{-2}, \binom{-1}{-1}, \binom{-2}{2}\} \\
U\binom{1}{2} &= \{\binom{1}{2}, \binom{2}{1}, \binom{-1}{-2}, \binom{-2}{-1}\} \\
U\binom{1}{-2} &= \{\binom{1}{-2}, \binom{2}{-1}, \binom{-1}{2}, \binom{-2}{1}\} \\
U\binom{1}{-1} &= \{\binom{1}{-1}, \binom{2}{2}, \binom{-1}{1}, \binom{-2}{-2}\}
\end{aligned}$$

Es ist

$$X = U\binom{0}{0} \sqcup U\binom{1}{0} \sqcup U\binom{1}{1} \sqcup U\binom{1}{2} \sqcup U\binom{1}{-2} \sqcup U\binom{1}{-1} .$$

Dank Bahnenlemma hat jedes Element $x \in X$, das sich in einer Bahn von Länge $|Ux| = 4$ befindet, einen Stabilisator von Ordnung $|U|/|Ux| = 8/4 = 2$.
Somit können wir z.B. $x = \binom{1}{1}$ heranziehen. In der Tat ist

$$\mathrm{Stab}_U(\binom{1}{1}) = \{ \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \} = \langle \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \rangle$$

von Ordnung 2.

Zu (3). Um zu zeigen, daß $U \overset{!}{\leqslant} \mathrm{N}_G(D)$, genügt es zu zeigen, daß die Erzeuger $\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ von U in $\mathrm{N}_G(D)$ liegen.
Zunächst ist $\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right) \in D \leqslant \mathrm{N}_G(D)$.
Seien dann $s,\, t \in \mathbb{F}_5^\times$ gegeben. Es ist

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}s&0\\0&t\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}0&t\\s&0\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}t&0\\0&s\end{smallmatrix}\right) \in D$$

und also $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{N}_G(D)$.
Insbesondere ist $UD \leqslant G$.
Aus obiger Auflistung der Elemente von U erhalten wir

$$D \cap U = \{ \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right) \}$$

und also $|D \cap U| = 4$.
Nun folgt $|UD| = \frac{|U|\cdot|D|}{|U\cap D|} = \frac{8\cdot 4^2}{4} = 2^5$.
Es ist $|G| = (5^2-1)(5^2-5) = 480 = 2^5 \cdot 15$, mit $15 \not\equiv_2 0$. Wegen $|UD| = 2^5$ ist also $UD \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Aufgabe 39

(1) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix}4&0&4\\4&2&2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$.

Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{Z}^{2\times 3}$ in Elementarteilerform, für welche es $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ gibt mit $SAT = D$. Man gebe nur D an.

(2) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix}1&5&4\\2&10&8\\2&2&0\\3&11&8\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{4\times 3}$.

Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{Z}^{4\times 3}$ in Elementarteilerform, für welche es $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ und $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ gibt mit $SAT = D$. Man gebe nur D an.

Lösung.
Zu (1). Wir formen um.

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{smallmatrix}4&0&4\\4&2&2\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}4&2&2\\4&0&4\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}2&4&2\\0&4&4\end{smallmatrix}\right) \\
\rightsquigarrow\ &\left(\begin{smallmatrix}2&0&0\\0&4&4\end{smallmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix}2&0&0\\0&4&0\end{smallmatrix}\right) =: D
\end{aligned}$$

Zu (2). Wir formen um.

$$
\begin{array}{cccccc}
& \begin{pmatrix} 1&5&4\\ 2&10&8\\ 2&2&0\\ 3&11&8 \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&5&4\\ 0&0&0\\ 0&-8&-8\\ 0&-4&-4 \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&0\\ 0&-8&-8\\ 0&-4&-4 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-4&-4\\ 0&-8&-8\\ 0&0&0 \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-4&-4\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} & \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-4&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} \\
\rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&4&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix} & =: & D & &
\end{array}
$$

Die Diagonaleinträge müssen nicht unbedingt positiv sein, aber man kann das erreichen.

Aufgabe 40

(1) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&3&1\\ 2&0&2\\ 2&5&3 \end{smallmatrix}\right)$. Man finde S, $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ mit $SAT = D$ in Elementarteilerform. Man gebe S, T und D an.

(2) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 2&0\\ 0&5 \end{smallmatrix}\right)$. Man finde S, $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $SAT = D$ in Elementarteilerform. Man gebe S, T und D an.

Lösung.

Zu (1). Wir formen um.

$$
\begin{array}{cccccc}
& \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&2\\ 2&5&3 \end{pmatrix} & \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&3&0\\ 2&0&2\\ 3&5&2 \end{pmatrix} & \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0\\ -2&1&0\\ -3&0&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&3&0\\ 0&-6&2\\ 0&-4&2 \end{pmatrix} \\
\overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&-3&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-6&2\\ 0&-4&2 \end{pmatrix} & \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&-6\\ 0&2&-4 \end{pmatrix} & \overset{\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&-1&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&-6\\ 0&0&2 \end{pmatrix} \\
\overset{\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&3\\ 0&0&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} & =: D & & &
\end{array}
$$

Dabei haben wir insgesamt folgende Matrizen verwendet.

$$
\begin{array}{rcl}
S & := & \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&3\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&-1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -2&1&0\\ -3&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&3\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -2&1&0\\ -1&-1&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -5&-2&3\\ -1&-1&1 \end{pmatrix} \\
T & := & \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&-3&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0&-3\\ 0&0&1\\ 0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&-3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Wir machen eine Probe:

$$
SAT = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ -5&-2&3\\ -1&-1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&3&1\\ 2&0&2\\ 2&5&3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&2&0\\ 0&0&2 \end{pmatrix} = D\,.
$$

Zu (2). Wir formen um.

$$
\begin{array}{cccccc}
& \begin{pmatrix} 2&0\\ 0&5 \end{pmatrix} & \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&0\\ 1&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 2&0\\ 5&5 \end{pmatrix} & \overset{\begin{pmatrix} 1&0\\ -2&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 2&0\\ 1&5 \end{pmatrix} \\
\overset{\begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&5\\ 2&0 \end{pmatrix} & \overset{\begin{pmatrix} 1&0\\ -2&1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&5\\ 0&-10 \end{pmatrix} & \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1&-5\\ 0&1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-10 \end{pmatrix} \\
\overset{\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} & \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&10 \end{pmatrix} & =: D & & &
\end{array}
$$

Dabei haben wir insgesamt folgende Matrizen verwendet.

$$
\begin{array}{rcl}
S & := & \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0\\ -2&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&0\\ -2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 2&-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2&1\\ 1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2&1\\ -5&2 \end{pmatrix} \\
T & := & \begin{pmatrix} 1&0\\ 1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&-5\\ 0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&-5\\ 1&-4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Wir machen eine Probe:

$$
SAT = \begin{pmatrix} -2&1\\ -5&2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&0\\ 0&5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&-5\\ 1&-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4&5\\ -10&10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&-5\\ 1&-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&10 \end{pmatrix} = D\,.
$$