M. Truong, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 22

Lösung 8

Aufgabe 29

(1) Sei $n \geqslant 1$. Sei K ein Körper. Sei $G = \mathrm{GL}_n(K)$. Sei $X = K^{n\times 1}$.

Man zeige: Vermittels herkömmlicher Multiplikation von Matrizen mit Vektoren wird X zu einer G-Menge.

(2) Man bestimme die Bahnen der G-Menge X.

(3) Sei nun $n = 2$ und $K = \mathbb{F}_5$. Es ist also $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ und $X = \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

 (a) Man bestimme $U := \mathrm{Stab}_G(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right))$.

 (b) Wir betrachten die U-Menge $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$. Man bestimme die Bahnen von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von U.

Lösung.

Zu (1). Wir haben in der Tat die Abbildung $(\cdot) : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ mittels Matrixmultiplikation.
Sei $x \in X = K^{n\times 1}$. Seien $g,\ \tilde{g} \in G = \mathrm{GL}_n(K)$.
Dann ist $1 \cdot x = \mathrm{E}_2 \cdot x = x$.
Ferner ist $(g \cdot \tilde{g}) \cdot x = g \cdot (\tilde{g} \cdot x)$, da Matrixmultiplikation assoziativ ist.

Zu (2). Die Bahn von $0 \in X$ ist $\{0\}$, da $g \cdot 0 = 0$ für $g \in G$.
Wir behaupten, daß die Bahn des Standardbasisvektors e_1 gleich $X \smallsetminus \{0\}$ ist. Sei $x \in X \smallsetminus \{0\}$. Wir müssen zeigen, daß es ein $g \in G$ gibt mit $g \cdot \mathrm{e}_1 \overset{!}{=} x$.
Sei $x_1 = x$. Es ist $x_1 \neq 0$, also das Tupel (x_1) linear unabhängig. Wir ergänzen x_1 zu einer Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Sei g die Matrix mit dieser Basis als Spaltenvektortupel. Dann ist $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Ferner ist $g \cdot \mathrm{e}_1 = x_1 = x$.
Ergebnis: Die Zerlegung von X in Bahnen ist $X = \{0\} \sqcup (X \smallsetminus \{0\})$.

Zu (3).
Zu (a). Es ist

$$U \;=\; \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) \,:\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \} \;=\; \{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,:\, b \in \mathbb{F}_5,\ d \in \mathbb{F}_5^\times \} .$$

Zu (b). Für jedes $a \in \mathbb{F}_5$ ist $\{\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right)\}$ eine Bahn unter U, da $u \cdot \left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right)$ für $u \in U$.
Wir berechnen die Bahn von $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Es ist $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, wobei $b \in \mathbb{F}_5$ und $d \in \mathbb{F}_5^\times$. Somit ist

$$\{ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 1} \,:\, d \neq 0 \}$$

eine Bahn unter U.
Wir erhalten die folgende disjunkte Zerlegung in Bahnen unter U.

$$\mathbb{F}_5^{2\times 1} \;=\; \{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\} \sqcup \{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\} \sqcup \{\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)\} \sqcup \{\left(\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right)\} \sqcup \{\left(\begin{smallmatrix}4\\0\end{smallmatrix}\right)\} \sqcup \{ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 1} \,:\, d \neq 0 \}$$

Aufgabe 30 Sei $a := (1, 2, 3, 4) \in \mathrm{S}_4$. Sei $b := (2, 4)$. Sei $\mathrm{D}_8 := \langle a, b\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.

(1) Man verifiziere: ${}^b a = a^{-1}$. Man verwende dies, um

$$\mathrm{D}_8 \;=\; \{ a^i \circ b^j \,:\, i \in [0, 3],\ j \in [0, 1] \}$$

zu begründen. Man gebe alle Elemente von D_8 in Zykelschreibweise an.

(2) Es ist $[1,4]$ eine D_8-Menge, wobei Multiplikation durch Anwendung gegeben ist. Man bestimme dafür den Stabilisator $\mathrm{Stab}_{\mathrm{D}_8}(2)$.

(3) Man bestimme die Konjugationsklassen von D_8. Man bestimme das Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8)$.

Lösung.
Zu (1). Es ist ${}^b a = (b(1), b(2), b(3), b(4)) = (1,4,3,2) = (1,2,3,4)^{-1} = a^{-1}$.
Also ist auch ${}^b(a^z) = a^{-z}$ für $z \in \mathbb{Z}$.
Es ist also $b \circ a^z = a^{-z} \circ b$.
Somit kann jedes Produkt in den Faktoren a und b durch Tauschen der Faktoren b nach rechts auf diese Weise in die Form $a^i \circ b^j$ gebracht werden, mit $i,\, j \in \mathbb{Z}$.
Da $|\langle a\rangle| = 4$ und $|\langle b\rangle| = 2$, kann man sich hierbei auf Exponenten $i \in [0,3]$ und $j \in [0,1]$ beschränken.
Es wird

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_8 & = & \{1,\, a,\, a^2,\, a^3,\, b,\, a\circ b,\, a^2\circ b,\, a^3\circ b\} \\ & = & \{\mathrm{id},\, (1,2,3,4),\, (1,3)(2,4),\, (1,4,3,2),\, (2,4),\, (1,2)(3,4),\, (1,3),\, (1,4)(2,3)\}\,. \end{array}$$

Zu (2). Wir haben für diesen Stabilisator die Elemente auszuwählen, in deren Zykeldarstellung 2 nicht auftritt (d.h. in einem Zykel der Länge 1 auftritt, der nicht geschrieben wird). Also ist

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{D}_8}(2) \;=\; \{\mathrm{id},\, (1,3)\} \;=\; \langle (1,3)\rangle\,.$$

Zu (3). Nebenrechnung: Es ist ${}^a b = a\circ b\circ a^{-1} = a^2 b$.
Wir haben die folgenden Konjugationsklassen.

$$\begin{array}{rclcl} {}^{\mathrm{D}_8}1 & = & \{1\} & = & \{\mathrm{id}\} \\ {}^{\mathrm{D}_8}a & = & \{a,\, {}^b a\} & = & \{(1,2,3,4),\, (1,4,3,2)\} \\ {}^{\mathrm{D}_8}(a^2) & = & \{a^2\} & = & \{(1,3)(2,4)\} \\ {}^{\mathrm{D}_8}b & = & \{b,\, {}^a b\} & = & \{(2,4),\, (1,3)\} \\ {}^{\mathrm{D}_8}(ab) & = & \{ab,\, {}^a(ab)\} & = & \{(1,2)(2,3),\, (1,4)(2,3)\} \end{array}$$

Das Zentrum ist nun die Vereinigung der einelementigen Konjugationsklassen:

$$\mathrm{Z}(\mathrm{D}_8) \;=\; \{1, a^2\} \;=\; \langle a^2\rangle \;=\; \langle (1,3)(2,4)\rangle\,.$$

Aufgabe 31 Seien G und H Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus.
Sei $k \geqslant 1$ und seien $g_1,\, \dots\, , g_k \in G$. Sei $U := \langle g_1, \dots, g_k\rangle \leqslant G$.

(1) Man zeige: $\varphi(U) = \langle \varphi(g_1), \dots, \varphi(g_k)\rangle$.

(2) Sei $x \in G$. Man zeige: ${}^x U = \langle\, {}^x g_1, \dots,\, {}^x g_k\rangle$.

(3) In der S_4-Menge $\mathcal{U}(\mathrm{S}_4)$ liegt $U := \langle (1,2,3,4)\rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.
Man zeige: $\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) = \mathrm{D}_8$; vgl. Aufgabe 30.

Lösung.
Zu (1). Es ist $U = \langle g_1, \dots, g_k\rangle$ die Teilmenge von G aller Elemente der Form

$$g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot g_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}\;,$$

wobei $\ell \geqslant 0$, $i_j \in [1,k]$ und $\varepsilon_j \in \{-1,+1\}$ für $j \in [1,\ell]$.
Also ist $\varphi(U)$ die Teilmenge von H aller Elemente der Form

$$\varphi(g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdot g_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot g_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}) \;=\; \varphi(g_{i_1})^{\varepsilon_1} \cdot \varphi(g_{i_2})^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \varphi(g_{i_\ell})^{\varepsilon_\ell}\;,$$

wobei $\ell \geqslant 0$, $i_j \in [1,k]$ und $\varepsilon_j \in \{-1,+1\}$ für $j \in [1,\ell]$.

Diese Teilmenge ist also gleich $\langle\varphi(g_1),\ldots,\varphi(g_k)\rangle$.

Zu (2). Wir betrachten den Gruppenautomorphismus $\varphi : G \to G : g \mapsto {}^x g$. Es wird

$$ {}^x U \;=\; \varphi(U) \;\overset{(1)}{=}\; \langle\varphi(g_1),\ldots,\varphi(g_k)\rangle \;=\; \langle\, {}^x g_1,\ldots,\, {}^x g_k\rangle\;. $$

Zu (3). Es ist

$$ \begin{array}{rcl} \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) & = & \{\, f\in \mathrm{S}_4 \;:\; {}^f U = U\,\} \\ & \overset{(2)}{=} & \{\, f\in \mathrm{S}_4 \;:\; \langle\, {}^f(1,2,3,4)\rangle = \langle(1,2,3,4)\rangle\,\} \\ & = & \{\, f\in \mathrm{S}_4 \;:\; {}^f(1,2,3,4) \in \{(1,2,3,4),\,(1,4,3,2)\}\,\}\;. \end{array} $$

Mit $a := (1,2,3,4)$ und $b := (2,4)$ wird ${}^a a = a$ und also $a\in \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U)$, sowie ${}^b a = a^{-1}$ und also $b\in \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U)$. Somit ist

$$ \mathrm{D}_8 \;=\; \langle a,b\rangle \;\leqslant\; \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) \;\leqslant\; \mathrm{S}_4\;. $$

Insbesondere wird

$$ 3 \;=\; [\mathrm{S}_4 : \mathrm{D}_8] \;=\; [\mathrm{S}_4 : \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U)]\cdot[\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) : \mathrm{D}_8]\;. $$

Nun ist ${}^{(1,2)}(1,2,3,4) = (2,1,3,4) = (1,3,4,2)$ und also $(1,2)\notin \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U)$. Somit ist $\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) < \mathrm{S}_4$.
Also ist $[\mathrm{S}_4 : \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U)] = 3$ und $[\mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) : \mathrm{D}_8] = 1$. Somit ist

$$ \mathrm{Stab}_{\mathrm{S}_4}(U) \;=\; \mathrm{D}_8\;. $$

Aufgabe 32

(1) Sei $n\geqslant 3$. Man zeige: $\mathrm{Z}(\mathrm{S}_n) = 1$.

(2) Sei $n\geqslant 2$. Sei K ein Körper. Man zeige: $\mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(K)) = \{\, c\cdot \mathrm{E}_n \;:\; c\in K^\times\,\}$.

Lösung.
Zu (1). Es ist $1 = \mathrm{id}\in \mathrm{Z}(\mathrm{S}_n)$.

Sei $f\in \mathrm{S}_4 \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$. Zu zeigen ist $f \overset{!}{\notin} \mathrm{Z}(\mathrm{S}_n)$.
Wir wählen ein $i\in[1,n]$ mit $f(i) =: j\neq i$. Wir wählen ein $k\in[1,n]$ mit $|\{i,j,k\}| = 3$, möglich, da $n\geqslant 3$ ist.

Es genügt zu zeigen, daß $f\circ(j,k) \overset{!}{\neq} (j,k)\circ f$ ist. In der Tat wird

$$ (f\circ(j,k))(i) \;=\; f(i) \;=\; j\;, $$

aber

$$ ((j,k)\circ f)(i) \;=\; (j,k)(j) \;=\; k\;. $$

Und es ist $j\neq k$.

Zu (2). Es ist $c\cdot \mathrm{E}_n \in \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(K))$ für $c\in K^\times$.
Sei umgekehrt $g =: (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p))$.
Seien $k,\,\ell\in\,[1,n]$ mit $k\neq\ell$ gegeben.
Sei $h := \mathrm{E}_n + \mathrm{e}_{k,\ell}$. Es wird $gh = hg$. Also ist in $K^{n\times n}$

$$ 0 \;=\; gh - hg \;=\; g(\mathrm{E}_n + \mathrm{e}_{k,\ell}) - (\mathrm{E}_n + \mathrm{e}_{k,\ell})g \;=\; g\,\mathrm{e}_{k,\ell} - \mathrm{e}_{k,\ell}\,g\;. $$

Der Eintrag an Position (k,ℓ) dieser Matrix ist $0 = a_{k,k} - a_{\ell,\ell}$.
Der Eintrag an Position (ℓ,ℓ) dieser Matrix ist $0 = a_{\ell,k}$.
Also ist $g = c\cdot \mathrm{E}_n$ für ein $c\in K^\times$.