Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 7

Aufgabe 25 Wir setzen Aufgabe 23 fort. Sei $G := \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\ b \in \mathbb{F}_5 \} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$.

Es operiert G auf $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

Seien $X_1 := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5^\times \}$, $X_2 := \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5,\ y \in \mathbb{F}_5^\times \}$ und $X_3 := \{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \}$.

Es ist $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ eine disjunkte Zerlegung in G-Teilmengen.

(1) Für $U := \{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{F}_5 \} \leqslant G$ bestimme man den Normalisator $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)}(U)$.

(2) Ist X_2 eine Bahn in $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$? Man finde $V \leqslant G$ mit $G/V \simeq X_2$ als G-Mengen.

(3) Man bestimme mit Hilfe des Fixpunktlemmas die Anzahl der Bahnen in $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von G. Was hat diese Anzahl mit der obigen disjunkten Zerlegung zu tun?

Aufgabe 26 Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge, mit Operationsmorphismus $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$.

(1) Sei $x \in X$ und sei $g \in G$. Man zeige: ${}^g\,\mathrm{Stab}_G(x) = \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$.

(2) Man zeige: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \bigcap\limits_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)$.

(3) Sei $U \leqslant G$. Sei $x \in X$. Man zeige: Es gibt eine G-Abbildung $\psi : G/U \to X$ mit $\psi(1 \cdot U) = x$ genau dann, wenn $U \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$ ist.

(4) Sei nun $G = \langle g_1, g_2 \rangle$, wobei $|\langle g_1 \rangle| = 5$ und $|\langle g_2 \rangle| = 7$. Gibt es in X eine Bahn der Länge 4 ?

Aufgabe 27 Sei G eine endliche Gruppe.

(1) Sei $x \in G$. Man zeige: $|\,{}^G x| \cdot |\mathrm{C}_G(x)| = |G|$.

(2) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei X eine Menge mit $|X| = n$. Sei $\beta : X \xrightarrow{\sim} [1, n]$ eine Bijektion. Man konstruiere einen Gruppenisomorphismus $\varphi : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_n$.

(3) Man bestimme in S_4 die Konjugationsklasse von $(1, 2)$.

(4) Man komponiere den Operationsmorphismus von S_4 auf ${}^{\mathrm{S}_4}(1, 2)$ mit einem Gruppenisomorphismus wie in (2), um einen Gruppenmorphismus $\psi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_6$ zu konstruieren. Man bestimme die Bilder $\psi\big((1, 2)\big)$ und $\psi\big((1, 2, 3, 4)\big)$ in S_6 .

Aufgabe 28 Sei $a := (1, 2, 4)$ und $b := (3, 5)$. Sei $G := \langle a, b \rangle \leqslant \mathrm{S}_5$.

Da $a \circ b = b \circ a$ gilt, ist $G = \{a^j \circ b^k : j \in [0, 2], k \in [0, 1]\}$. Es ist $|G| = 6$.

Es operiert G auf der Menge $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ durch Anwendung.

(1) Man bestimme für $j \in [0, 2]$ und $k \in [0, 1]$ die Menge der Fixpunkte $\mathrm{Fix}_{a^j \circ b^k}(X) \subseteq X$.

(2) Man bestimme mit Hilfe des Fixpunktlemmas die Anzahl der Bahnen in X unter der Operation von G.

(3) Man liste die Bahnen in X unter der Operation von G auf.