N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 07.06.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 6

Aufgabe 21 Man zeige oder widerlege.

(1) In A_5 sind die Elemente $(1,2,3,4,5)$ und $(1,2,3,5,4)$ konjugiert zueinander.

(2) In A_5 sind die Elemente $(1,2,3)$ und $(1,3,2)$ konjugiert zueinander.

(3) Seien G und H endliche Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus.
Es ist $|\varphi(G)|$ ein Teiler von $\mathrm{ggT}(|G|, |H|)$.

(4) Wir betrachten die multiplikativ geschriebene Gruppe $\mathbb{R}_{>0} = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und die additiv geschriebene Gruppe $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$.

Die Logarithmus-Abbildung $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 22 Seien R und S Ringe. Sei $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringmorphismus.
Wir erinnern an $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{x \in R : \varphi(x) = 0\}$ und an $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{x \in \mathrm{U}(R) : \varphi^{\mathrm{U}}(x) = 1\}$.
Man zeige oder widerlege.

(1) Es ist $\varphi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(2) Falls es einen Ringmorphismus $\psi : S \to R$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_S$ gibt, dann ist
$\varphi^{\mathrm{U}} : \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ ein surjektiver Gruppenmorphismus.

(3) Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\}$.

(4) Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi^{\mathrm{U}}) = \{1 + x : x \in \mathrm{Kern}(\varphi)\} \cap \mathrm{U}(R)$.

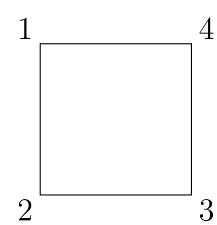
Aufgabe 23 Sei $G := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\ b \in \mathbb{F}_5\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ gegeben.
Es operiert G auf $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

(1) Man bestimme $\mathrm{Z}(G)$ und $|G/\mathrm{Z}(G)|$.

(2) Man finde nichtleere G-Teilmengen X_1, X_2, $X_3 \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 1}$ mit $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$.

(3) Sei $\varphi_i : G \to \mathrm{S}_{X_i}$ der Operationsmorphismus von G auf X_i für $i \in [1,3]$. Man bestimme $\mathrm{Kern}(\varphi_i)$ für $i \in [1,3]$. Welche dieser G-Mengen ist treu?

Aufgabe 24 Sei $\mathrm{D}_8 := \langle (1,2,3,4),\ (2,4) \rangle \leqslant \mathrm{S}_4$.
Es operiert $f \in \mathrm{D}_8$ auf $\{1,2,3,4\}$ via $f \cdot x = f(x)$ für $x \in \{1,2,3,4\}$.



(1) Man bestimme $|\mathrm{D}_8|$ und liste alle Elemente von D_8 auf.

(2) Wir interpretieren diese Operation als Operation auf einem Quadrat mit Ecken $1,2,3,4$. Liefert D_8 die Spiegelung des Quadrats an der Diagonalen durch die Ecken 2 und 4? Liefert D_8 die Spiegelung des Quadrats an der Mittelsenkrechten der Kante zwischen Ecke 2 und Ecke 3? Liefert D_8 die Drehung des Quadrats um den Winkel $-\pi/2$?