N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 31.05.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 5

Aufgabe 17

(1) Sei G eine Gruppe. Sei $U \leqslant G$. Zu zeigen ist folgendes. Zum einen ist $({}_U\!\sim)$ eine Äquivalenzrelation. Zum anderen ist Ux die Äquivalenzklasse von $x \in G$. Vgl. Definition 96.(1).

(2) Gilt für $x, y \in G$ mit $x \,{}_U\!\!\sim y$ auch $zx \,{}_U\!\!\sim zy$ für $z \in G$?

Aufgabe 18 Seien G und H Gruppen. Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenmorphismus.
Man zeige oder widerlege.

(1) Das Urbild einer Untergruppe von H unter φ ist eine Untergruppe von G.

(2) Das Urbild eines Normalteilers von H unter φ ist ein Normalteiler von G.

(3) Das Bild einer Untergruppe von G unter φ ist eine Untergruppe von H.

(4) Das Bild eines Normalteilers von G unter φ ist ein Normalteiler von H.

Aufgabe 19 Sei die abelsche Untergruppe

$$V := \langle (1,2)(3,4), (1,3)(2,4) \rangle = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \leqslant \mathrm{A}_4$$

gegeben.

(1) Man bestimme die Linksnebenklassen modulo V in A_4 und die Rechtsnebenklassen modulo V in A_4 . Vgl. Definition 96.(1),(2).

(2) Sei $U := \langle (1,2)(3,4) \rangle \leqslant V$. Gilt $U \trianglelefteqslant V \trianglelefteqslant \mathrm{A}_4$? Ist $U \trianglelefteqslant \mathrm{A}_4$?

(3) Bestimmen Sie die Ordnung der Faktorgruppe A_4/V. Ist diese Faktorgruppe zyklisch?

Aufgabe 20

(1) Man bestimme gewisse Elemente $x, y \in \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(12))$ so, dass $\mathrm{U}(\mathbb{Z}/(12)) = \langle x, y \rangle$ ist.

(2) Man bestimme alle Elemente $x \in \mathrm{U}(\mathbb{F}_{11})$, für welche $\mathrm{U}(\mathbb{F}_{11}) = \langle x \rangle$ ist.

(3) Man finde einen surjektiven Gruppenmorphismus $\varphi : \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(21)) \to \mathrm{U}(\mathbb{Z}/(7))$ und bestimme seinen Kern.