

## Algebra für Lehramt, SoSe 21

**Blatt 3****Aufgabe 9**

- (1) Ist  $(4) \cap (6)$  in  $\mathbb{Z}$  ein Hauptideal? Man bestimme gegebenenfalls einen Erzeuger.
- (2) Sei  $I := (22, 10) \trianglelefteq \mathbb{Z}$ . Ist  $4 \in I$ ?
- (3) Ist  $(X) \cap (Y)$  in  $\mathbb{Q}[X, Y]$  ein Hauptideal? Man bestimme gegebenenfalls einen Erzeuger.
- (4) Sei  $J := (Y^2 - X, Y - X^2) \trianglelefteq \mathbb{Q}[X, Y]$ . Ist  $XY^2 - Y \in J$ ?

**Aufgabe 10**

- (1) Man bestimme ein  $a \in \mathbb{Z}$  und einen Ringisomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/(a) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(7).$$

Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für  $\varphi^{-1}$ .

- (2) Man bestimme ein  $f(X) \in \mathbb{F}_2[X]$  und einen Ringisomorphismus

$$\psi : \mathbb{F}_2[X]/(f(X)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1) \times \mathbb{F}_2[X]/(X^2).$$

Man bestimme eine Abbildungsvorschrift für  $\psi^{-1}$ .

**Aufgabe 11** Man zeige oder widerlege.

- (1) Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Sei  $I \trianglelefteq R$ . Ist  $R$  noethersch, dann ist auch  $R/I$  noethersch.
- (2) Sei  $R$  ein Hauptidealbereich. Dann ist auch  $R[X]$  ein Hauptidealbereich.
- (3) Die Abbildung  $v_3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  ist surjektiv.
- (4) Die Abbildung  $v_3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  ist injektiv.

**Aufgabe 12**

- (1) Man bestimme  $q, r \in \mathbb{Z}$  mit  $r \in [0, 10]$  und mit  $273 = q \cdot 11 + r$ .
- (2) Man bestimme  $q(X), r(X) \in \mathbb{F}_3[X]$  mit  $\deg(r(X)) < 2$  und mit  $X^4 + X^3 - X + 1 = q(X) \cdot (X^2 - 1) + r(X)$ .
- (3) Man bestimme  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $|r|^2 < 5$  und mit  $7 = q \cdot (2 - i) + r$ .