

Blatt 12

Aufgabe 45 Sei $n \geq 1$. Man bestimme das Kreisteilungspolynom $\Phi_n(X)$ in folgenden Fällen.

- (1) $n = 8$
- (2) $n = 12$
- (3) $n = 14$
- (4) $n = 30$

Aufgabe 46 Man bestimme folgendes.

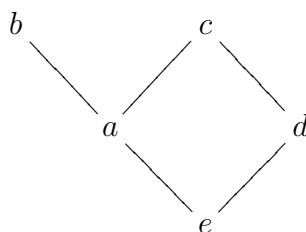
- (1) $\varphi(540)$
- (2) $\mu_{\zeta_{15}, \mathbb{Q}(\zeta_5)}(X)$ und eine $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ -lineare Basis von $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$
- (3) $[\mathbb{Q}(\zeta_{36}) : \mathbb{Q}]$
- (4) $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $a \neq b$ und $\varphi(a) = \varphi(b) = 24$.

Aufgabe 47

- (1) Sei $f(X) := X^3 + X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie $\text{ggT}(f(X), f'(X))$. Ist $f(X)$ quadratfrei? Falls nicht, geben Sie einen nichtkonstanten quadratischen Faktor explizit an.
- (2) Sei $g(X) := X^4 - 5X^2 - 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie $\text{ggT}(g(X), g'(X))$. Ist $g(X)$ quadratfrei? Falls nicht, geben Sie einen nichtkonstanten quadratischen Faktor explizit an.
- (3) Sei $K = \mathbb{F}_2(T)$. Es ist $h(X) := X^2 - T \in K[X]$ irreduzibel und also quadratfrei. Sei $L|K$ ein algebraischer Abschluss. Ist $h(X) \in L[X]$ quadratfrei?

Aufgabe 48 Wir betrachten das Poset

$$(X, \leq) = (\{a, b, c, d, e\}, \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (d, c), (e, a), (e, d), (e, c), (e, b)\}) .$$



- (1) Bestimmen Sie alle minimalen, maximalen, initialen und terminalen Elemente in X .
- (2) Man bestimme alle Ketten in X .
- (3) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : X \rightarrow \text{Pot}(X) : x \mapsto \{z \in X : z \leq x\}$ injektiv ist. Gilt für $x, y \in X$ mit $x \leq y$, dass $f(x) \subseteq f(y)$ ist? Gibt es $x \in X$ mit $f(x) = \{a, c\}$?