N. Krauß, M. Künzer Abgabe bis Mo 05.07.2021

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Blatt 10

Aufgabe 37

(1) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_8$ mit 8 Elementen.

(2) Man bestimme eine $\mathbb{F}_2$-lineare Basis von $\mathbb{F}_8$ und den Grad $[\mathbb{F}_8 : \mathbb{F}_2]$ der Körpererweiterung $\mathbb{F}_8|\mathbb{F}_2$.

(3) Man erstelle die Additionstafel von $\mathbb{F}_8$.

(4) Man erstelle die Multiplikationstafel von $\mathbb{F}_8$.
Man gebe zu jedem Element in $\mathbb{F}_8^\times$ das multiplikative Inverse an.

Aufgabe 38 Sei L ein Körper und $\alpha : L \to L$ ein Körpermorphismus.
Sei $\mathrm{Fix}_\alpha(L) := \{x \in L : \alpha(x) = x\}$ die Menge der Fixpunkte von L unter α.

(1) Man zeige: Es ist $\mathrm{Fix}_\alpha(L)$ ein Teilkörper von L.

(2) Man konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_{25}$ mit 25 Elementen.

(3) Wir erinnern an den Frobenius-Endomorphismus $\mathrm{Fr} : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25} : x \mapsto x^5$.
Man bestimme $\mathrm{Fix}_{\mathrm{Fr}}(\mathbb{F}_{25})$.

Aufgabe 39 Sei $b := \sqrt[3]{5}$. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(b)|\mathbb{Q}$.

(1) Man zeige mittels Descartes, dass $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
Man folgere, dass $\mu_{b,\mathbb{Q}}(X) = X^3 - 5$ ist.

(2) Man schreibe $(1+b)^{-1}$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination in der $\mathbb{Q}$-linearen Basis $(1, b, b^2)$ von $\mathbb{Q}(b)$.

(3) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(b)$ nach $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$.

(4) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(b)$ nach $\mathbb{Q}(b)$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 40 Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$.

(1) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ über $\mathbb{Q}$.

(2) Man bestimme alle Körpermorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nach $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$ über $\mathbb{Q}$.

(3) Man bestimme $\mu_{3+\sqrt{2},\mathbb{Q}}(X)$.

(4) Man bestimme $\{\deg(\mu_{y,\mathbb{Q}}(X)) : y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\}$.