N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 9

Aufgabe 33

(1) Man bestimme bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 270.

(2) Man bestimme $\mathrm{Syl}_3(\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{18})$, wobei $\mathrm{C}_2 = \langle a \rangle$ und $\mathrm{C}_{18} = \langle b \rangle$ geschrieben werde.

(3) Seien G und H isomorphe Gruppen. Man zeige: Für $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ ist

$$|\{x \in G : |\langle x \rangle| = n\}| \;=\; |\{x \in H : |\langle x \rangle| = n\}| \;.$$

(4) Wie viele Elemente in $\mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(9)$ haben Ordnung 3?

Lösung zu Aufgabe 33:

(1) Es ist $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Nach Korollar 171 gilt für eine abelsche Gruppe A der Ordnung 270, dass $A \simeq \mathbb{Z}/(270)$, $A \simeq \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3)/ \times \mathbb{Z}/(30)$ oder $A \simeq \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(90)$.

Es enthält $\mathbb{Z}/(270)$ ein Element der Ordnung 270.

Da $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(30)$ und $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(90)$ kein solches Element enthalten, folgt

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/(270) & \not\simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(30) \text{ und} \\ \mathbb{Z}/(270) & \not\simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(90)\;. \end{array}$$

Es enthält $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(90)$ ein Element der Ordnung 90.

Da $\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(30)$ kein solches Element enthält folgt

$$\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(90) \not\simeq \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(30)\;.$$

Mit Bemerkung 172 folgt alternativ auch

$$\begin{array}{rcrcl} A & \simeq & \mathbb{Z}/(270) & \simeq & \mathbb{Z}/(27) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(5)\;, \\ A & \simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}(3) \times \mathbb{Z}(30) & \simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(5) \text{ oder} \\ A & \simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}(90) & \simeq & \mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(5)\;. \end{array}$$

(2) Da $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{18}$ abelsch ist, gibt es genau eine 3-Sylowgruppe P in $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{18}$. Diese hat Ordnung 9. Es ist $P = \langle (1, b^2) \rangle$.

(3) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenisomorphismus. Sei $x \in G$ und $n = |\langle x \rangle|$, d.h. $x^n = 1_G$. Da φ ein Gruppenmorphismus ist, ist $|\langle \varphi(x) \rangle|$ ein Teiler von n. *Angenommen* $k := |\langle \varphi(x) \rangle| < n$. Dann ist $1_H = (\varphi(x))^k = \varphi(x^k)$, d.h. $1_G \neq x^k \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Aber φ ist injektiv, also ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{1_G\}$. *Widerspruch.*

Da φ bijektiv ist, lässt sich jedes Element $h \in H$ eindeutig schreiben als $\varphi(x)$ für ein $x \in G$.

Insgesamt ist

$$|\{x \in H : |\langle x \rangle| = n\}| = |\{\varphi(x) : x \in G \text{ und } |\langle \varphi(x) \rangle| = n\}| = |\{x \in G : |\langle x \rangle| = n\}|\;.$$

(4) Es ist $\{x \in \mathbb{Z}/(9) : 3 \cdot x = 0\} = \{0, 3, 6\}$. Daher ist

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}/(9)\times\mathbb{Z}/(9) : 3\cdot(x,y) = 0\} = \{(0,0),(0,3),(0,6),(3,0),(3,3),(3,6),(6,0),(6,3),(6,6)\} .$$

Also ist

$$\begin{array}{rl} & \{(x,y) \in \mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(9) : (x,y) \text{ hat Ordnung } 3\} \\ = & \{(0,3),(0,6),(3,0),(3,3),(3,6),(6,0),(6,3),(6,6)\} . \end{array}$$

Somit haben 8 Elemente in $\mathbb{Z}/(9) \times \mathbb{Z}/(9)$ Ordnung 3.

Aufgabe 34 Sei G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 27.

(1) Man bestimme $|\mathrm{Z}(G)|$.

(2) Ist $G/\mathrm{Z}(G)$ abelsch? Gibt es in $G/\mathrm{Z}(G)$ eine Untergruppe der Ordnung 3?

(3) Gibt es in G einen Normalteiler von Ordnung 9? Ist jede Untergruppe der Ordnung 9 von G auch ein Normalteiler?

(4) Man finde eine Untergruppe $G \leqslant \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ von Ordnung 27. Man bestimme ihr Zentrum $\mathrm{Z}(G)$ und einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ von Ordnung 9.

Lösung zu Aufgabe 34:

(1) Es ist $\mathrm{Z}(G) \leqslant G$. Daher ist $|\mathrm{Z}(G)|$ ein Teiler von 27. Also ist $|\mathrm{Z}(G)| \in \{1, 3, 9, 27\}$. Da G nichtabelsch ist, ist $|\mathrm{Z}(G)| \neq 27$. Nach Lemma 176 ist $|\mathrm{Z}(G)| \neq 1$. *Angenommen* $|\mathrm{Z}(G)| = 9$. Dann ist $[G : \mathrm{Z}(G)] = 3$ und somit G abelsch, vgl. Lemma 175. *Widerspruch.* Also ist $|\mathrm{Z}(G)| = 3$.

(2) Es ist $G/\mathrm{Z}(G)$ eine Gruppe von Ordnung $9 = 3^2$ und daher nach Beispiel 177 abelsch. Mithin ist $G/\mathrm{Z}(G) \simeq \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ oder $G/\mathrm{Z}(G) \simeq \mathrm{C}_9$, vgl. Korollar 171. In beiden Fällen gibt es mindestens eine Untergruppe der Ordnung 3.

Es ist $G/\mathrm{Z}(G) \simeq \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$.
Angenommen $G/\mathrm{Z}(G) \simeq \mathrm{C}_9$. Dann ist $G/\mathrm{Z}(G)$ zyklisch, d.h. es gibt $a \in G$ mit $G/\mathrm{Z}(G) = \langle a\mathrm{Z}(G)\rangle$. Es ist $G = \bigsqcup_{i\in[0,8]} a^i\mathrm{Z}(G)$. Somit lässt sich jedes $g \in G$ eindeutig schreiben als $g = a^i \cdot z$ mit $z \in \mathrm{Z}(G)$ und $i \in [0, 8]$. Seien $g, g' \in G$. Schreibe $g = a^i \cdot z,\ g' = a^j \cdot z' \in G$ mit $z, z' \in \mathrm{Z}(G)$ und $i, j \in [0, 8]$. Nun ist

$$g \cdot g' = a^i \cdot z \cdot a^j \cdot z' = a^i a^j \cdot zz' = a^j a^i z' z = a^j z' \cdot a^i z = g' g .$$

Also ist G abelsch. *Widerspruch.*

(3) Nach (2) gibt es eine Untergruppe $U \leqslant G/\mathrm{Z}(G)$ von Ordnung 3.

Da $G/\mathrm{Z}(G)$ abelsch ist, ist $U \trianglelefteq G/\mathrm{Z}(G)$. Sei $\rho : G \to G/\mathrm{Z}(G)$ der Restklassenmorphismus. Sei $V := \rho^{-1}(U) = \{g \in G : \rho(g) \in U\}$. Nach Aufgabe 18.(2) ist $V \trianglelefteq G$. Nach dem Homomorphiesatz gilt $V/\mathrm{Z}(G) = V/\operatorname{Kern}(\rho|_V) \simeq U$ und daher ist $|V| = |U| \cdot |\mathrm{Z}(G)| = 9$.

Sei $N \leqslant G$ mit $|N| = 9$. Es ist 3 der kleinste Primteiler von $|N|$. Es ist $[G : N] = 3 \leqslant 3$. Nach Lemma 178 ist $N \trianglelefteq G$.

(4) Es ist $G = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : u, v, w \in \mathbb{F}_3\} \leqslant \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ eine Untergruppe von Ordnung 27.

Wir behaupten $\mathrm{Z}(G) \overset{!}{=} \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_3\right\}$. Es ist

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & u & x+v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) .$$

Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{F}_3 \right\} \subseteq \mathrm{Z}(G)$. Nach (1) ist $|\mathrm{Z}(G)| = 3$, also folgt Gleichheit.

Sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : v, w \in \mathbb{F}_3 \right\}$. Es ist $|N| = 9$. Für $\begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{v} \\ 0 & 1 & \tilde{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \tilde{v} \\ 0 & 1 & \tilde{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\tilde{v} \\ 0 & 1 & -\tilde{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v-\tilde{v} \\ 0 & 1 & w-\tilde{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N\ .$$

Also ist $N \leqslant G$. Somit ist nach (3) auch $N \trianglelefteqslant G$.

Aufgabe 35 Sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 168.

(1) Hat G eine Untergruppe von Index 2?

(2) Hat G eine Untergruppe von Index 3? *Hinweis:* Operationsmorphismus $G \to \mathrm{S}_{G/U}$.

(3) Gibt es ein Element $x \in G$ mit $|\,{}^G x| = 4$?

(4) Man bestimme $|\operatorname{Syl}_7(G)|$. Wie viele Elemente der Ordnung 7 gibt es in G?

Lösung zu Aufgabe 36:

(1) Nein. Eine Untergruppe von Index 2 wäre normal in G, vgl. Bemerkung 104. Da G einfach ist, hat G nur die Normalteiler 1 und G.

(2) Nein. *Angenommen doch.* Sei $U \leqslant G$ von Index 3. Es operiert G transitiv auf der nichttrivialen G-Menge G/U.

Sei $\varphi : G \to \mathrm{S}_{G/U}$ der Operationsmorphismus. Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \trianglelefteqslant G$. Da G transitiv operiert, ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq G$. Da G einfach ist, folgt $\mathrm{Kern}(\varphi) = 1$.

Nach dem Homomorphiesatz ist $G \simeq \varphi(G)$.

Da $[G : U] = 3$ ist, gibt es einen Gruppenisomorphismus $\psi : \mathrm{S}_{G/U} \simeq \mathrm{S}_3$, vgl. Aufgabe 27.(2). Somit ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_3.

Da $|G| = 168$ kein Teiler von $3! = 6$ ist, ist dies nicht möglich. *Widerspruch.*

(3) Nein. *Angenommen doch.* Schreibe $X := {}^G x$. Es operiert G transitiv durch Konjugation auf X. Sei $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$ der Operationsmorphismus. Es ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq G$. Da G einfach ist, folgt $\mathrm{Kern}(\varphi) = 1$. Es ist $\mathrm{S}_X \simeq \mathrm{S}_4$.

Somit ist G isomorph zu einer Untergruppe von S_4.

Da $|G| = 168$ kein Teiler von $4! = 24$ ist, ist dies nicht möglich. *Widerspruch.*

(4) Es ist $|\operatorname{Syl}_7(G)| \equiv_7 1$ und ein Teiler von 24. Die Teiler von 24 sind $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$. Somit ist $|\operatorname{Syl}_7(G)| \in \{1, 8\}$. Da G einfach ist, folgt $|\operatorname{Syl}_7(G)| = 8$, denn sonst wäre die 7-Sylowgruppe normal in G.

Da 7 eine Primzahl ist und $|P| = 7$ für jede 7-Sylowgruppe P gilt, ist jedes P zyklisch von Ordnung 7 und enthält daher 6 Elemente der Ordnung 7, vgl. Bemerkung 161. Umgekehrt liegt jedes Element g der Ordnung 7 in genau einer 7-Sylowgruppe, nämlich in $\langle g \rangle$. Insgesamt gibt es also genau 6-mal soviele Elemente der Ordnung 7 wie 7-Sylowgruppen, d.h. $6 \cdot 8 = 48$ Elemente der Ordnung 7 in G.

Aufgabe 36 Man entscheide, ob es eine einfache Gruppe G mit $|G| = n$ gibt.

(1) $n = 10$

(2) $n = 40$

(3) $n = 48$

(4) $n = 60$

Lösung zu Aufgabe 35:

(1) Es ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und teilt 2. Also ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 1$ und die 5-Sylowgruppe ein Normalteiler. Somit gibt es keine einfache Gruppe der Ordnung 10.

(2) Es ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und ein Teiler von 8. Also ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 1$ und die 5-Sylowgruppe ein Normalteiler. Somit gibt es keine einfache Gruppe der Ordnung 40.

(3) Es ist $|\operatorname{Syl}_2(G)| \equiv_2 1$ und ein Teiler von 3. Also ist $|\operatorname{Syl}_2(G)| \in \{1, 3\}$.

Fall 1: Es ist $|\operatorname{Syl}_2(G)| = 1$. Dann ist die 2-Sylowgruppe ein Normalteiler, d.h. G ist nicht einfach.

Fall 2: Es ist $|\operatorname{Syl}_2(G)| = 3$. Es operiert G transitiv durch Konjugation auf $\operatorname{Syl}_2(G)$. Also ist $\varphi : G \to \mathrm{S}_{\operatorname{Syl}_2(G)} \simeq \mathrm{S}_3$ ein Gruppenmorphismus, der nicht jedes Element auf id abbildet, vgl. Aufgabe 27. Nach dem Homomorphiesatz ist $G/\operatorname{Kern}(\varphi) \simeq \varphi(G)$ und also $|\operatorname{Kern}(\varphi)| \cdot |\varphi(G)| = |G| = 48$. Da $1 < |\varphi(G)| \leqslant |\mathrm{S}_3| = 6$ ist, folgt $1 < |\operatorname{Kern}(\varphi)| < 48$. Also ist $\operatorname{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, der weder 1 noch G ist.

Somit gibt es keine einfache Gruppe der Ordnung 48.

(4) Ja. Es ist $|\mathrm{A}_5| = 60$ und A_5 ist einfach.