N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 8

Aufgabe 29

(1) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung 160. Es gebe ein $P \in \operatorname{Syl}_5(G)$ mit $P \ntrianglelefteq G$. Man bestimme $|\operatorname{Syl}_5(G)|$.

(2) Sei H eine Gruppe von Ordnung 35. Man zeige, dass $H \simeq \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_7$ ist.

(3) Seien $p,\, q \in \mathbb{Z}$ prim mit $3 \leqslant p < q$. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^2 \cdot q$. Man zeige, dass es eine normale q-Sylowgruppe in G gibt.

Lösung zu Aufgabe 29:

(1) Wir zerlegen $|G| = 160 = 32 \cdot 5$. Die Teiler von 32 sind $1, 2, 4, 8, 16, 32$. Es ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| \equiv_5 1$ und ein Teiler von 32. Die einzigen Teiler mit dieser Eigenschaft sind 1 und 16. Da $P \ntrianglelefteq G$ ist, ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| > 1$. Folglich ist $|\operatorname{Syl}_5(G)| = 16$.

(2) Wir zerlegen $|H| = 5 \cdot 7$.

Es ist $|\operatorname{Syl}_5(H)| \equiv_5 1$ und ein Teiler von 7. Also ist $|\operatorname{Syl}_5(H)| = 1$.

Es ist $|\operatorname{Syl}_7(H)| \equiv_7 1$ und ein Teiler von 5. Also ist $|\operatorname{Syl}_7(H)| = 1$.

Sei $P \in \operatorname{Syl}_5(H)$. Nach Korollar 155 ist $P \trianglelefteq H$. Es hat P Ordnung 5. Nach Bemerkung 161 ist $P \simeq \mathrm{C}_5$.

Sei $Q \in \operatorname{Syl}_7(H)$. Nach Korollar 155 ist $Q \trianglelefteq H$. Es hat Q Ordnung 7. Nach Bemerkung 161 ist $Q \simeq \mathrm{C}_7$.

Es ist $P \cap Q = 1$, denn ein Element $v \in P \cap Q$ hat eine Ordnung, die sowohl 5 als auch 7 teilt, woraus $v = 1$ folgt.

Nach Bemerkung 158 ist $H \simeq P \times Q \simeq \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_7$.

(3) Es ist $|\operatorname{Syl}_q(G)| \equiv_q 1$ und ein Teiler von p^2.

Fall 1: $|\operatorname{Syl}_q(G)| = 1$. Nach Korollar 155 gibt es eine normale q-Sylowgruppe in G.

Fall 2: $|\operatorname{Syl}_q(G)| = p$. Es ist $p \equiv_q 1$, d.h. q ein Teiler von $p - 1$. Das ist nicht möglich, da $p < q$ ist. Somit tritt dieser Fall nicht ein.

Fall 3: $|\operatorname{Syl}_q(G)| = p^2$. Es ist

$$p^2 \equiv_q 1, \text{ d.h. } 0 \equiv_q p^2 - 1 = (p-1)(p+1)\ ,$$

d.h. q ist ein Teiler von $p - 1$ oder ein Teiler von $p + 1$.

Ersteres ist nicht möglich, da $p < q$.

Also ist q Teiler von $p + 1$. Da $p < q \leqslant p + 1$ ist, folgt $q = p + 1$. Dann ist aber p oder q gerade, was nicht sein kann, da $3 \leqslant p < q$. Somit tritt dieser Fall nicht ein.

Es kann nur *Fall 1* auftreten. Also gibt es eine normale q-Sylowgruppe in G.

Aufgabe 30 Man zeige oder widerlege.

Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| > 1$. Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim mit $|G| \equiv_p 0$. Sei $M := \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P$.

(1) Es ist $M \trianglelefteq G$.

(2) Sei $N \trianglelefteq G$ mit $|N| = p^b$ für ein $b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Dann ist $N \leqslant M$.

(3) Seien $U \leqslant G$ und $N \trianglelefteq G$ gegeben mit $U \cap N = 1$ und mit $|G| = |U| \cdot |N|$.
Dann ist $G \simeq U \times N$.

(4) Es gibt einen Primfaktor q von $|G|$ so, dass G eine normale q-Sylowgruppe besitzt.

Lösung zu Aufgabe 30:

(1) Richtig. Da $\mathrm{Syl}_p(G)$ eine transitive G-Menge unter der Konjugationsoperation ist, vgl. Satz 154, sind alle p-Sylowgruppen in G konjugiert.

Wir wählen $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Dann ist

$$M = \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P = \bigcap_{g \in G} gQg^{-1} \ .$$

Für $x \in G$ ist nun

$$xMx^{-1} = x \left(\bigcap_{g \in G} gQg^{-1} \right) x^{-1} = \bigcap_{g \in G} xgQg^{-1}x^{-1} = \bigcap_{g \in G} (xg)Q(xg)^{-1} \ .$$

Es ist $G = \{xg : g \in G\}$, da Multiplikation mit x eine Bijektion ist.

Also ist $\bigcap_{g \in G} (xg)Q(xg)^{-1} = \bigcap_{g \in G} gQg^{-1} = M$.

Insgesamt ist für $x \in G$ also $xMx^{-1} = M$, d.h. $M \trianglelefteq G$.

(2) Richtig. Es ist N eine p-Untergruppe von G. Nach den Sylowsätzen gibt es ein $Q \in \mathrm{Syl}_p(G)$ mit $N \leqslant Q$. Konjugation mit $g \in G$ liefert

$$gNg^{-1} \leqslant gQg^{-1} \ .$$

Da $N \trianglelefteq G$ ist, folgt $N \leqslant gQg^{-1}$ für alle $g \in G$. Also ist $N \leqslant \bigcap_{g \in G} gQg^{-1} = \bigcap_{P \in \mathrm{Syl}_p(G)} P = M$.

(3) Falsch. Sei $G = \mathrm{S}_3$, $N = \langle (1,2,3) \rangle = \mathrm{A}_3 \simeq \mathrm{C}_3$ und $U = \langle (1,2) \rangle \simeq \mathrm{C}_2$.

Es ist $U \cap N = 1$ und $6 = |\mathrm{S}_3| = |U| \cdot |N| = 2 \cdot 3$.

Das direkte Produkt $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3$ ist abelsch und S_3 ist nichtabelsch.

Folglich ist $G = \mathrm{S}_3 \not\simeq \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 \simeq U \times N$.

(4) Falsch. Sei $G = \mathrm{S}_4$. Es ist $|\mathrm{S}_4| = 24 = 8 \cdot 3$.

Es ist $|\,\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)| \equiv_3 1$ und ein Teiler von 8. Also $|\,\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)| \in \{1, 4\}$.

Es ist $P := \langle (1,2,3) \rangle \in \mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)$. Da ${}^{(3,4)}P = \langle (1,2,4) \rangle \neq P$ ist, ist $P \ntrianglelefteq \mathrm{S}_4$.

Also ist $|\,\mathrm{Syl}_3(\mathrm{S}_4)| = 4$ und S_4 besitzt keine normale 3-Sylowgruppe.

Die vier 3-Sylowgruppen sind

$$\langle (1,2,3) \rangle,\ \langle (1,2,4) \rangle,\ \langle (1,3,4) \rangle \text{ und } \langle (2,3,4) \rangle \ .$$

Es ist $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{S}_4)| \equiv_2 1$ und ein Teiler von 3. Also $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{S}_4)| \in \{1,3\}$.
Es ist

$$\begin{array}{rcl} Q & := & \mathrm{D}_8 \\ & = & \langle (1,2,3,4),(2,4) \rangle \\ & = & \{\mathrm{id},(1,2,3,4),(1,3)(2,4),(1,2)(3,4),(1,4)(2,3),(1,4,3,2),(1,3),(2,4)\} \\ & \leqslant & \mathrm{S}_4 \end{array}$$

eine Untergruppe der Ordnung 8, also $Q \in \operatorname{Syl}_2(\mathrm{S}_4)$, vgl. Aufgabe 24.
Da ${}^{(3,4)}Q = \langle (1,2,4,3),(2,3) \rangle \neq Q$ ist, ist $Q \ntrianglelefteq \mathrm{S}_4$.
Also ist $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{S}_4)| = 3$ und S_4 besitzt keine normale 2-Sylowgruppe.

Die drei 2-Sylowgruppen sind

$$\langle (1,2,3,4),(2,4) \rangle,\ \langle (1,2,4,3),(2,3) \rangle \text{ und } \langle (1,4,2,3),(1,2) \rangle\ .$$

Es gibt somit keinen Primfaktor q von $|\mathrm{S}_4|$ so, dass S_4 eine normale q-Sylowgruppe besitzt.

Aufgabe 31

(1) Sei p prim. Sei $G := \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$. Man bestimme eine p-Sylowgruppe P von G, ihren Normalisator $\mathrm{N}_G(P)$ und $|\operatorname{Syl}_p(G)|$.

(2) Man bestimme $\operatorname{Syl}_7(\mathrm{D}_{14})$ und $\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})$.

Lösung zu Aufgabe 31:

(1) Es ist $|G| = (p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$. Eine p-Sylowgruppe von G hat somit Ordnung p^3.
Es ist z.B. $P := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : u,v,w \in \mathbb{F}_p \right\} \leqslant G$ eine Untergruppe von Ordnung p^3, also ist $P \in \operatorname{Syl}_p(G)$.
Wir behaupten, dass $\mathrm{N}_G(P) \overset{!}{=} \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) : a,d,f \in \mathbb{F}_p^\times,\ b,c,e \in \mathbb{F}_p \right\} =: N$ ist.
Zu $\supseteq$. Wir müssen zeigen, dass $n \cdot x \cdot n^{-1} \in P$ ist für $x \in P$ und $n \in N$, d.h. dass es ein $y \in P$ gibt mit $n \cdot x = y \cdot n$.
Sei $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) \in N$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P$. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \overset{!}{=} & \left(\begin{smallmatrix} 1 & \tilde{u} & \tilde{v} \\ 0 & 1 & \tilde{w} \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) \\ \Leftrightarrow & \left(\begin{smallmatrix} a & au+b & av+bw+c \\ 0 & d & dw+e \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) & \overset{!}{=} & \left(\begin{smallmatrix} a & b+\tilde{u}d & c+\tilde{u}e+\tilde{v}f \\ 0 & d & e+\tilde{w}f \\ 0 & 0 & f \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} au+b & \overset{!}{=} & \tilde{u}d+b \\ av+bw+c & \overset{!}{=} & c+\tilde{u}e+\tilde{v}f \\ dw+e & \overset{!}{=} & e+\tilde{w}f \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \tilde{u} & \overset{!}{=} & \frac{au}{d} \\ \tilde{v} & \overset{!}{=} & \frac{av+bw}{f} - \frac{aue}{df} \\ \tilde{w} & \overset{!}{=} & \frac{dw}{f} \end{array}$$

Da $\begin{pmatrix} 1 & \frac{au}{d} & \frac{av+bw}{f} - \frac{aue}{df} \\ 0 & 1 & \frac{dw}{f} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ ist, ist ${}^{n}P = P$, d.h. $n \in \mathrm{N}_G(P)$.

Zu $\subseteq$. Sei $n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_P(G)$. Wir müssen zeigen, dass $d = g = h = 0$ ist, d.h. dass $n \in N$ liegt.

Da $n \in \mathrm{N}_G(P)$ ist, ist ${}^{n}P = P$, d.h. zu jedem $x \in P$ gibt es ein Element $y \in P$ so, dass $nx = yn$ ist.

Insbesondere muss es ein Element $y = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P$ so geben, dass $n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = y \cdot n$ ist.

Es ist

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a+b & a+b+c \\ d & d+e & d+e+f \\ g & g+h & g+h+i \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} a+ud+vg & b+ue+vh & c+uf+vi \\ d+wg & e+wh & f+wi \\ g & h & i \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(I)} & a & = & a+ud+vg \\
\text{(II)} & a+b & = & b+ue+vh \\
\text{(III)} & a+b+c & = & c+uf+vi \\
\text{(IV)} & d & = & d+wg \\
\text{(V)} & d+e & = & e+wh \\
\text{(VI)} & d+e+f & = & f+wi \\
\text{(VII)} & g & = & g \\
\text{(VIII)} & g+h & = & h \\
\text{(IX)} & g+h+i & = & i\ .
\end{array}$$

Aus (VIII) folgt $g = 0$. Damit folgt aus (IX), dass $h = 0$ ist. Aus (V) folgt, dass $d = 0$ ist. Somit ist $n \in N$.

Es ist

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Syl}_p(G)| = \frac{|G|}{|\mathrm{N}_G(P)|} &= \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{(p-1)^3 \cdot p^3} \\
&= \frac{(p^3-1)(p^2-1)(p-1)}{(p-1)^3} \\
&= (p^2+p+1)(p+1)\ .
\end{aligned}$$

Zur Probe stellen wir fest, dass $|\operatorname{Syl}_p(G)| = (p^2+p+1)(p+1) \equiv_p 1$ ist, in Einklang mit den Sylow-Sätzen.

(2) Es ist $\mathrm{D}_{14} = \langle a, b\rangle$, mit $a := (1,2,3,4,5,6,7)$ und $b := (2,7)(3,6)(4,5)$, vgl. Definition 159.

Es ist $|\operatorname{Syl}_7(\mathrm{D}_{14})| \equiv_7 1$ und ein Teiler von 2. Also $|\operatorname{Syl}_7(\mathrm{D}_{14})| = 1$. Es ist $P := \langle a\rangle \leqslant \mathrm{D}_{14}$ eine Untergruppe von Ordnung 7, also $\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14}) = \{P\}$.

Es ist $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})| \equiv_2 1$ und ein Teiler von 7. Also $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})| = 1$ oder $|\operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})| = 7$.

Es ist $Q := \langle b\rangle \leqslant \mathrm{D}_{14}$ eine Untergruppe von Ordnung 2. Also ist $Q \in \operatorname{Syl}_2(\mathrm{D}_{14})$.

Sei $Q_i := {}^{a^i}Q = \langle {}^{a^i}b\rangle$ für $i \in [0, 6]$.

Es sind

$$\begin{array}{rcl} Q_0 = Q & = & \langle(2,7)(3,6)(4,5)\rangle \\ Q_1 & = & \langle(1,3)(4,7)(5,6)\rangle \\ Q_2 & = & \langle(1,5)(2,4)(6,7)\rangle \\ Q_3 & = & \langle(1,7)(2,6)(3,5)\rangle \\ Q_4 & = & \langle(1,2)(3,7)(4,6)\rangle \\ Q_5 & = & \langle(1,4)(2,3)(5,7)\rangle \\ Q_6 & = & \langle(1,6)(2,5)(3,4)\rangle \end{array}$$

7 verschiedene 2-Sylowgruppen. Also $\mathrm{Syl}_2(\mathrm{D}_{14}) = \{Q_i : i \in [0,6]\}$.

Aufgabe 32

(1) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,2]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^\times$ und $(x_1) \supseteq (x_2)$.

(2) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 8 & 21 & -3 & 22 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{Z})$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,4]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_j \in \mathbb{Z}^\times$ für $j \in [1,4]$ und $(x_1) \supseteq (x_2) \supseteq (x_3) \supseteq (x_4)$.

(3) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 \\ 3\mathrm{i}-3 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^{2\times 2}$. Man finde $S, T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])$ derart, dass $SAT = D$ ist, mit $D = \sum_{j\in[1,2]} x_j\, \mathrm{e}_{j,j}$, wobei $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$ und $(x_1) \supseteq (x_2)$.

Lösung zu Aufgabe 32:

(1) Wir rechnen wie von Satz 164 vorgegeben.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} =: D$$

Wir multiplizieren die operierenden Matrizen zusammen, getrennt nach links und rechts.

$$\begin{array}{rcl} S & := & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right) \\ T & := & \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right) \end{array}$$

In der Tat ist nun $SAT = D$.

(2) Wir rechnen, wie von Satz 164 vorgegeben, wobei wir noch das Vorzeichen von Zeilen

oder Spalten gegebenenfalls ändern.

$$\begin{pmatrix} 8 & 21 & -3 & 22 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 3 & -3 \\ 8 & 21 & -3 & 22 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 8 & 21 & -3 & 22 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 21 & -3 & 6 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \\ 0 & -24 & 0 & -24 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \\ 0 & 0 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \\ 0 & 0 & 24 & 48 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \\ 0 & 0 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -24 & -57 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -57 & -24 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -24 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 72 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 72 \end{pmatrix} =: D$$

Wir multiplizieren die operierenden Matrizen zusammen, getrennt nach links und rechts.

$$\begin{aligned} S &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & 13 & -38 & 6 \\ 16 & 40 & -112 & 19 \end{pmatrix} \\ T &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Tat ist nun $SAT = D$.

(3) Wir rechnen wie von Satz 164 vorgegeben.

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 \\ 3\mathrm{i}-3 & 6 \end{pmatrix} \overset{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3\mathrm{i} & 1 \end{smallmatrix}\right)\cdot(-)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 2 \\ 0 & 6-6\mathrm{i} \end{pmatrix} \overset{(-)\cdot\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathrm{i}-1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 0 \\ 0 & 6-6\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 & 0 \\ 0 & -6\mathrm{i}(\mathrm{i}+1) \end{pmatrix} =: D$$

Wir erhalten mit

$$\begin{array}{rcl} S & := & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ T & := & \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \end{array}$$

dass $SAT = D$ ist.