N. Krauß, M. Künzer

Algebra für Lehramt, SoSe 21

Lösung 7

Aufgabe 25 Wir setzen Aufgabe 23 fort. Sei $G := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\, b \in \mathbb{F}_5\} \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$.
Es operiert G auf $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ via $A \cdot v := Av$, also via Multiplikation der Matrix $A \in G \subseteq \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ mit dem Vektor $v \in \mathbb{F}_5^{2\times 1}$.
Seien $X_1 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5^\times\}$, $X_2 := \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5,\, y \in \mathbb{F}_5^\times\}$ und $X_3 := \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.
Es ist $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ eine disjunkte Zerlegung in G-Teilmengen.

(1) Für $U := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : b \in \mathbb{F}_5\} \leqslant G$ bestimme man den Normalisator $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)}(U)$.

(2) Ist X_2 eine Bahn in $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$? Man finde $V \leqslant G$ mit $G/V \simeq X_2$ als G-Mengen.

(3) Man bestimme mit Hilfe des Fixpunktlemmas die Anzahl der Bahnen in $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von G. Was hat diese Anzahl mit der obigen disjunkten Zerlegung zu tun?

Lösung zu Aufgabe 25:

(1) Wir erinnern an $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)}(U) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5) : {}^gU = U\}$. Sei $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$. Für $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in U$ ist

$$\begin{aligned} g \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot g^{-1} &= \tfrac{1}{ad-bc} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{ad-bc} \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & au+b \\ c & cu+d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) \\ &= \tfrac{1}{ad-bc} \cdot \left(\begin{smallmatrix} ad-c(au+b) & a^2u \\ -c^2u & c(ua-b)+ad \end{smallmatrix}\right) \in U \end{aligned}$$

genau dann, wenn $c = 0$ ist, da dann

$$\frac{1}{ad} \cdot \begin{pmatrix} ad & a^2u \\ 0 & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{au}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U\,.$$

Also ist $\mathrm{N}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)}(U) = G$

(2) Die G-Teilmenge $X_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{F}_5,\, y \in \mathbb{F}_5^\times\}$ ist transitiv, da für $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in X_2$ sich

$$\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)}_{\in G} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

ergibt. Daher ist X_2 eine Bahn von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$, vgl. Bemerkung 133.(2).
Es ist $w := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in X_2$. Nach dem Bahnenlemma (Lemma 140) ist

$$G/\operatorname{Stab}_G(w) \simeq G \cdot w = X_2$$

als G-Mengen. Es ist

$$\begin{aligned} V := \operatorname{Stab}_G(w) = \{g \in G : g \cdot w = w\} &= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\, b \in \mathbb{F}_5 \text{ und } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) : a, d \in \mathbb{F}_5^\times,\, b \in \mathbb{F}_5 \text{ und } \left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\} \\ &= \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathbb{F}_5\} \leqslant G\,. \end{aligned}$$

(3) Für $g \in G$ ist $\mathrm{Fix}_g(\mathbb{F}_5^{2\times 1}) = \{x \in \mathbb{F}_5^{2\times 1} : g \cdot x = x\}$. Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ und $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}_5^{2\times 1}$ betrachten wir die Fixpunktgleichung

$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \stackrel{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} au+bv \\ dv \end{smallmatrix}\right) .$$

Fall 1: $d \neq 1$. In diesem Fall folgt aus

$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \stackrel{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} au+bv \\ dv \end{smallmatrix}\right) ,$$

dass $v = 0$ ist, d.h. $\left(\begin{smallmatrix} u \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \stackrel{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} au \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Fall 1.1: $a \neq 1$. In diesem Fall folgt auch $u = 0$. Also gibt es nur den Fixpunkt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.
In G haben wir $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ Elemente von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, d \in \mathbb{F}_5 \setminus \{0, 1\}$ und $b \in \mathbb{F}_5$.

Fall 1.2: $a = 1$. In diesem Fall ist $u \in \mathbb{F}_5$ beliebig. Also gibt es 5 Fixpunkte.
In G haben $3 \cdot 5 = 15$ Elemente die Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $d \in \mathbb{F}_5 \setminus \{0, 1\}$ und $b \in \mathbb{F}_5$.

Fall 2: $d = 1$. Die Fixpunktgleichung lautet in diesem Fall

$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \stackrel{!}{=} \left(\begin{smallmatrix} au+bv \\ v \end{smallmatrix}\right) ,$$

d.h. $au + bv \stackrel{!}{=} u$, d.h. $(a-1)u + bv \stackrel{!}{=} 0$.

Fall 2.1: $(a, b) \neq (1, 0)$. Es gibt $4 \cdot 5 - 1 = 19$ Elemente der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $(a, b) \neq (1, 0)$, $a, b \in \mathbb{F}_5$.

Fall 2.1.1: $b \neq 0$. In diesem Fall gibt es die fünf Fixpunkte aus $\left\{\begin{pmatrix} u \\ \frac{1-a}{b}u \end{pmatrix} : u \in \mathbb{F}_5\right\}$.

Fall 2.1.2: $b = 0$. In diesem Fall gibt es die fünf Fixpunkte aus $\left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ v \end{smallmatrix}\right) : v \in \mathbb{F}_5\right\}$.

Fall 2.2: $(a, b) = (1, 0)$. Es gibt nur ein Element in G, das diesen Fall erfüllt, nämlich $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$.
In diesem Fall ist jedes Element von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ ein Fixpunkt. Also gibt es 25 Fixpunkte.

Es gibt insgesamt $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ Elemente in G.

Nach dem Fixpunktlemma ist die Anzahl k der Bahnen in $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von G gegeben durch

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\,\mathrm{Fix}_g(\mathbb{F}_5^{2\times 1})| = \frac{1}{80}(45 \cdot 1 + 15 \cdot 5 + 19 \cdot 5 + 1 \cdot 25) = \frac{240}{80} = 3 .$$

Die disjunkte Zerlegung $\mathbb{F}_5^{2\times 1} = X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3$ ist eine Zerlegung in Bahnen. Es sind $X_1 = G \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $X_3 = G \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ Bahnen von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$ unter der Operation von G. Es bestätigt sich so nochmals die Anzahl $k = 3$ der Bahnen.

Aufgabe 26 Sei G eine Gruppe. Sei X eine G-Menge, mit Operationsmorphismus $\varphi : G \to \mathrm{S}_X$.

(1) Sei $x \in X$ und sei $g \in G$. Man zeige: ${}^g\,\mathrm{Stab}_G(x) = \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$.

(2) Man zeige: $\mathrm{Kern}(\varphi) = \bigcap\limits_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)$.

(3) Sei $U \leqslant G$. Sei $x \in X$. Man zeige: Es gibt eine G-Abbildung $\psi : G/U \to X$ mit $\psi(1 \cdot U) = x$ genau dann, wenn $U \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$ ist.

(4) Sei nun $G = \langle g_1, g_2 \rangle$, wobei $|\langle g_1 \rangle| = 5$ und $|\langle g_2 \rangle| = 7$. Gibt es in X eine Bahn der Länge 4 ?

Lösung zu Aufgabe 26:

(1) Sei $h \in {}^g\,\mathrm{Stab}_G(x)$, d.h. es gibt $\tilde{h} \in \mathrm{Stab}_G(x)$ mit ${}^g\tilde{h} = h$. Dann ist

$$h \cdot (g \cdot x) = {}^g\tilde{h} \cdot g \cdot x = g \cdot \tilde{h} \cdot g^{-1} \cdot g \cdot x = g \cdot \tilde{h} \cdot x \overset{\tilde{h} \in \mathrm{Stab}_G(x)}{=} g \cdot x \ .$$

Folglich ist $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$.

Sei andererseits $h \in \mathrm{Stab}_G(g \cdot x)$, also $h \cdot g \cdot x = g \cdot x$. Wir wollen zeigen, dass $h \in {}^g\,\mathrm{Stab}_G(x)$ ist.

Es ist

$$g^{-1} \cdot \underbrace{h \cdot g \cdot x}_{= g \cdot x} = g^{-1} \cdot g \cdot x = x \ .$$

Folglich ist $\tilde{h} := g^{-1} h g \in \mathrm{Stab}_G(x)$. Damit ist $h = {}^g\tilde{h} \in {}^g\,\mathrm{Stab}_G(x)$.

(2) Für $g \in \mathrm{Kern}(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = \mathrm{id}_X\}$ und $x \in X$ ist $g \cdot x = (\varphi(g))(x) = \mathrm{id}_X(x) = x$ und also $g \in \mathrm{Stab}_G(x)$ stets, also $g \in \bigcap\limits_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)$.

Sei andererseits $g \in \bigcap\limits_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)$, d.h. $x = g \cdot x = (\varphi(g))(x)$ für $x \in X$, d.h. $\varphi(g) = \mathrm{id}_X$, d.h. $g \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(3) Gibt es eine G-Abbildung $\psi : G/U \to X$ mit $\psi(1 \cdot U) = x$, dann ist

$$u \cdot x = u \cdot \psi(1 \cdot U) = \psi(uU) = \psi(1 \cdot U) = x$$

für $u \in U$, d.h. stets $u \in \mathrm{Stab}_G(x)$, d.h. $U \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$.

Sei andererseits $U \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$. Wir zeigen, dass die Abbildung $\psi : G/U \to X$ mit $\psi(g \cdot U) = gx$ eine wohldefinierte G-Abbildung ist.

Wir haben Repräsentantenunabhängigkeit zu zeigen. Seien $g, h \in G$ mit $gU = hU$. Dann ist $h^{-1}g \in U \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$, d.h. $h^{-1}gx = x$, d.h. $gx = hx$. Also ist ψ eine wohldefinierte Abbildung.

Für $h \in G$ ist $\psi(h \cdot gU) = hgx = h \cdot \psi(gU)$. Somit ist ψ eine G-Abbildung.

Es ist $\psi(1 \cdot U) = 1 \cdot x = x$.

(4) *Angenommen, es gibt eine transitive G-Menge $Y \subseteq X$ mit 4 Elementen.*

Sei φ_Y der Operationsmorphismus von G auf Y, d.h.

$$\varphi_Y : G \to \mathrm{S}_Y : g \mapsto (\varphi_Y(g) : Y \to Y : y \mapsto g \cdot y) \ .$$

Die Ordnung von $\varphi_Y(g_1)$ ist wegen des Satzes von Lagrange ein gemeinsamer Teiler von 5 und von $|\mathrm{S}_Y| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, d.h. $|\langle \varphi_Y(g_1) \rangle| = 1$ und folglich $\varphi_Y(g_1) = \mathrm{id}_Y$.

Ebenso ist die Ordnung von $\varphi_Y(g_2)$ ein Teiler von 7 und von $|\mathrm{S}_Y| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, d.h. $|\langle \varphi_Y(g_2) \rangle| = 1$ und folglich $\varphi_Y(g_2) = \mathrm{id}_Y$.

Also operieren sowohl g_1 als auch g_2 trivial auf Y, d.h. für $y \in Y$ ist $G \cdot y = \{y\} \neq Y$, im *Widerspruch* zur Transitivität von Y.

Folglich gibt es in X keine Bahn der Länge 4 .

Aufgabe 27 Sei G eine endliche Gruppe.

(1) Sei $x \in G$. Man zeige: $|{}^G x| \cdot |\mathrm{C}_G(x)| = |G|$.

(2) Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$. Sei X eine Menge mit $|X| = n$. Sei $\beta : X \xrightarrow{\sim} [1, n]$ eine Bijektion. Man konstruiere einen Gruppenisomorphismus $\varphi : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_n$.

(3) Man bestimme in S_4 die Konjugationsklasse von $(1, 2)$.

(4) Man komponiere den Operationsmorphismus von S_4 auf ${}^{\mathrm{S}_4}(1, 2)$ mit einem Gruppenisomorphismus wie in (2), um einen Gruppenmorphismus $\psi : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_6$ zu konstruieren. Man bestimme die Bilder $\psi\big((1, 2)\big)$ und $\psi\big((1, 2, 3, 4)\big)$ in S_6 .

Lösung zu Aufgabe 27:

(1) Sei $x \in G$. Wir betrachten G als G-Menge via Konjugation. Es ist ${}^G x$ eine Bahn von G, vgl. Beispiel 134.(2), und $\mathrm{C}_G(x) = \mathrm{Stab}_G(x)$, vgl. Beispiel 137.(1).

Nun ist, nach Korollar 141, $|{}^G x| \cdot |\mathrm{C}_G(x)| = |G|$.

(2) Wir zeigen, dass $\varphi : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_n$ mit $\varphi(f) = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

Wohldefiniertheit:

Für eine Bijektion $f : X \to X$ ist auch $\varphi(f) = \beta \circ f \circ \beta^{-1} : [1, n] \to [1, n]$ eine Bijektion als Verknüpfung bijektiver Abbildungen.

Gruppenmorphismus:

Für $f, \tilde{f} \in \mathrm{S}_X$ ist $\varphi(f \circ \tilde{f}) = \beta \circ f \circ \tilde{f} \circ \beta^{-1} = \beta \circ f \circ \beta^{-1} \circ \beta \circ \tilde{f} \circ \beta^{-1} = \varphi(f) \circ \varphi(\tilde{f})$. Folglich ist φ ein Gruppenmorphismus.

Surjektivität:

Für $g \in \mathrm{S}_n$ ist $\varphi(\beta^{-1} \circ g \circ \beta) = \beta \circ (\beta^{-1} \circ g \circ \beta) \circ \beta^{-1} = g$.

Injektivität:

Wir zeigen, dass $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{\mathrm{id}\}$ ist. Sei $f \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann ist $\mathrm{id} = \varphi(f) = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$, d.h. $\beta^{-1} \circ \mathrm{id} = f \circ \beta^{-1}$, d.h. $\beta^{-1} \circ \beta = f$, d.h. $\mathrm{id} = f$.

(3) Es ist ${}^{\mathrm{S}_4}(1, 2) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$, da z.B.

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{id}}(1,2) &= (1,2), & {}^{(2,3)}(1,2) &= (1,3), \quad {}^{(2,4)}(1,2) = (1,4), \quad {}^{(1,2,3)}(1,2) = (2,3), \\
{}^{(1,2,4)}(1,2) &= (2,4), & {}^{(1,3)(2,4)}(1,2) &= (3,4) \ .
\end{aligned}
$$

Beachte, beim Konjugieren bleibt der Zykeltyp erhalten.

Alternativ: Es ist $\mathrm{C}_{\mathrm{S}_4}\big((1, 2)\big) = \{\mathrm{id}, (1, 2), (3, 4), (1, 2)(3, 4)\}$.

Nach (1) ist $|{}^{\mathrm{S}_4}(1, 2)| = \dfrac{|\mathrm{S}_4|}{|\mathrm{C}_{\mathrm{S}_4}((1, 2))|} = \frac{24}{4} = 6$.

Da beim Konjugieren der Zykeltyp erhalten bleibt und S_4 gerade 6 Zykel der Länge 2 enthält, folgt ${}^{\mathrm{S}_4}(1, 2) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

(4) Wir haben z.B. die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \beta : {}^{\mathrm{S}_4}(1,2) & \to & [1,6] \\ (1,2) & \mapsto & 1 \\ (1,3) & \mapsto & 2 \\ (1,4) & \mapsto & 3 \\ (2,3) & \mapsto & 4 \\ (2,4) & \mapsto & 5 \\ (3,4) & \mapsto & 6 \end{array}$$

Schreibe $X := {}^{\mathrm{S}_4}(1,2)$.

Sei $\varphi : \mathrm{S}_X \to \mathrm{S}_6 \, : f \mapsto \varphi(f) = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$.

Sei $\kappa : \mathrm{S}_4 \to \mathrm{S}_X \, : \, g \mapsto (\kappa(g) : X \to X : x \mapsto {}^g x)$ der Operationsmorphismus von S_4 auf X.

Definiere

$$\begin{array}{rcccccc} \psi = \varphi \circ \kappa : \mathrm{S}_4 & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{S}_X & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{S}_6 \\ g & \mapsto & (\kappa(g) : X \to X : x \mapsto {}^g x) & & \\ & & f & \mapsto & \beta \circ f \circ \beta^{-1} \, . \end{array}$$

Es ist $\psi\big((1,2)\big) = \varphi\big(\kappa\big((1,2)\big)\big) = \beta \circ \kappa\big((1,2)\big) \circ \beta^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} [1,6] & \xrightarrow{\beta^{-1}} & X & \xrightarrow{\kappa((1,2))} & X & \xrightarrow{\beta} & [1,6] \\ 1 & \mapsto & (1,2) & \mapsto & (1,2) & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & (1,3) & \mapsto & (2,3) & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & (1,4) & \mapsto & (2,4) & \mapsto & 5 \\ 4 & \mapsto & (2,3) & \mapsto & (1,3) & \mapsto & 2 \\ 5 & \mapsto & (2,4) & \mapsto & (1,4) & \mapsto & 3 \\ 6 & \mapsto & (3,4) & \mapsto & (3,4) & \mapsto & 6 \, . \end{array}$$

In Zykelschreibweise ist $\psi\big((1,2)\big) = (2,4)(3,5)$.

Es ist $\psi\big((1,2,3,4)\big) = \varphi(\kappa\big((1,2,3,4)\big)) = \beta \circ \kappa\big((1,2,3,4)\big) \circ \beta^{-1}$:

$$\begin{array}{ccccccc} [1,6] & \xrightarrow{\beta^{-1}} & X & \xrightarrow{\kappa((1,2,3,4))} & X & \xrightarrow{\beta} & [1,6] \\ 1 & \mapsto & (1,2) & \mapsto & (2,3) & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & (1,3) & \mapsto & (2,4) & \mapsto & 5 \\ 3 & \mapsto & (1,4) & \mapsto & (1,2) & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & (2,3) & \mapsto & (3,4) & \mapsto & 6 \\ 5 & \mapsto & (2,4) & \mapsto & (1,3) & \mapsto & 2 \\ 6 & \mapsto & (3,4) & \mapsto & (1,4) & \mapsto & 3 \, . \end{array}$$

In Zykelschreibweise ist $\psi\big((1,2,3,4)\big) = (1,4,6,3)(2,5)$.

Aufgabe 28 Sei $a := (1,2,4)$ und $b := (3,5)$. Sei $G := \langle a, b \rangle \leqslant \mathrm{S}_5$.
Da $a \circ b = b \circ a$ gilt, ist $G = \{a^j \circ b^k : j \in [0,2], k \in [0,1]\}$. Es ist $|G| = 6$.
Es operiert G auf der Menge $X := \{1,2,3,4,5\}$ durch Anwendung.

(1) Man bestimme für $j \in [0,2]$ und $k \in [0,1]$ die Menge der Fixpunkte $\mathrm{Fix}_{a^j \circ b^k}(X) \subseteq X$.

(2) Man bestimme mit Hilfe des Fixpunktlemmas die Anzahl der Bahnen in X unter der Operation von G.

(3) Man liste die Bahnen in X unter der Operation von G auf.

Lösung zu Aufgabe 28:

(1) Es ist

$$\begin{array}{lcllcl}
\mathrm{Fix}_{\mathrm{id}}(X) & = & X & & & \\
\mathrm{Fix}_{b}(X) & = & \{x \in X : (3,5) \cdot x = x\} & = & \{1,2,4\} \\
\mathrm{Fix}_{a}(X) & = & \{x \in X : (1,2,4) \cdot x = x\} & = & \{3,5\} \\
\mathrm{Fix}_{a \circ b}(X) & = & \{x \in X : (1,2,4)(3,5) \cdot x = x\} & = & \emptyset \\
\mathrm{Fix}_{a^2}(X) & = & \{x \in X : (1,4,2) \cdot x = x\} & = & \{3,5\} \\
\mathrm{Fix}_{a^2 \circ b}(X) & = & \{x \in X : (1,4,2)(3,5) \cdot x = x\} & = & \emptyset \,.
\end{array}$$

(2) Nach dem Fixpunktlemma ist die Anzahl k der Bahnen in X unter der Operation von G gegeben durch $k = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} |\,\mathrm{Fix}_g(X)| = \frac{1}{6}(5+3+2+0+2+0) = 2$.

(3) Nach (2) gibt es zwei Bahnen.

Diese sind gegeben durch $G \cdot 1 = \{1,2,4\}$ und $G \cdot 3 = \{3,5\}$.